Untersuchungen über den Einfluss der Invaliditätsdauer auf die Sterblichkeit der Invaliden

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Fakultät II der Universität Bern

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Max Hofer
(Basel)

Buchdruckerei Dr. J. Weiss · Affoltern am Albis · 1941

Untersuchungen über den Einfluss der Invaliditätsdauer auf die Sterblichkeit der Invaliden

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Fakultät II der Universität Bern

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Max Hofer
(Basel)

Buchdruckerei Dr. J. Weiss · Affoltern am Albis · 1941

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag des Herrn Prof. Dr. A. Alder angenommen.

Bern, den 22. Februar 1940.

Der Dekan:
Prof. H. Greinacher.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Meinen lieben Eltern

An dieser Stelle möchte ich meinen verehrten Lehrern, den Herren Prof. Alder, Prof. Ammon, Prof. Hadwiger, Prof. Scherrer, für ihre während meines Studiums gebotenen Lehren meinen besten Dank aussprechen.

Besonderen Dank schulde ich Herrn Prof. Alder, auf dessen Anregung und unter dessen Leitung die vorliegende Arbeit entstanden ist.

Das Beobachtungsmaterial, das ich zur Herstellung der Invaliden-Selektions-Sterbetafel benötigte, wurde mir von der E. V. K. und der P. H. K. in freundlicher Weise von den Herren A. Forrer und W. Planta zur Verfügung gestellt. Auch ihnen möchte ich für ihre Bemühungen hiermit bestens danken.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis 5
Einleitung 7

I. Kapitel:
Eine exakte Methode zur Bestimmung der rohen Invaliden-Selektions-Sterbenswahrscheinlichkeiten aus dem Beobachtungsmaterial 9

II. Kapitel:
Ausgleichungsmethoden für Invaliden-Selektions-Sterbetafeln . 17
A. Aeltere Methoden 17
B. Die Methode von E. H. Wells [11] 21
C. Die Ausgleichung der S. I. S. 1930—1937 30

III. Kapitel:
Beziehungen zwischen Aggregat- und Selektions-Sterbetafeln . 38

IV. Kapitel:
Die Verteilung der Invaliden bei der E. V. K. und bei der P. H. K. am 31. Dezember 1937 52
A. Die Altersverteilung der Invaliden 52
B. Die Verteilung der Invaliden in bezug auf die Invaliditätsdauer 53

V. Kapitel:
Anwendungen und Schlußfolgerungen 56
A. Das Deckungskapital der Aktiven und Invaliden bei Verwendung von Aggregat- und Selektions-Sterbetafeln . . . 56
B. Schlußbemerkung 62

Tabellen . . . . . 64, 67—88
Graphische Darstellungen 65, 89, 91
Literaturverzeichnis 93

Einleitung

Ueberall da, wo eine Gesamtheit von Invaliden als statistische Maße den Berechnungen von Wahrscheinlichkeitswerten zugrunde liegt, erhalten wir verschiedene Resultate, je nachdem wir den Begriff Invalidität auslegen.

So ist beispielsweise die Sterblichkeit der Invaliden wesentlich abhängig vom Grad der Invalidität. Alter, Berufsart und Geschlecht der Versicherten sind weitere Faktoren, die die Sterblichkeit beeinflussen. Alle diese Abhängigkeitsgrößen sind bei der Herstellung von Sterbetafeln zu berücksichtigen, d.h. man hat die Invalidengesamtheiten nach den oben angegebenen Gesichtspunkten aufzuteilen und so für die Invalidensterblichkeit verschiedene, nach Alter abgestufte, Sterbetafeln herzustellen. Betrachten wir ganz allgemein die Invalidensterblichkeit als eine Funktion von der Form $q^i\ (x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_m)$, so können wir sagen, daß m verschiedene nach n Gesichtspunkten abgestufte Tafeln möglich sind. Es ist klar, daß um alle diese Tafeln herzustellen, ein sehr großes Beobachtungsmaterial nötig ist, und es wird daraus ersichtlich, daß man erst im Laufe der Zeit, als die Erfahrungen größer wurden, eine solche Unterteilung der Gesamtheiten vornehmen konnte. So wurde erst nachträglich festgestellt, daß die Invaliditätsdauer einen nicht unbedeutenden Einfluß auf die Sterblichkeit der Invaliden besitzt. Diese neue Erkenntnis hatte zur Folge, daß eine Abstufung der Sterbetafeln nach Alter und Invaliditätsdauer nötig wurde. Die damit verbundene größere Mühe sowohl zur Herstellung der Sterbetafeln selber, als auch für die Berechnungen von denjenigen Versicherungswerten, welche Funktionen dieser Sterbetafeln sind, hat die Frage nach der Zweckmäßigkeit der Verwendung solcher doppelt abgestuften, sog. Selektions-Sterbetafeln aufgeworfen.

In der vorliegenden Arbeit haben wir uns die Aufgabe gestellt, den Einfluß der Invaliditätsdauer auf die Sterblichkeit der Invaliden der beiden größten schweizerischen Pensionskassen zu untersuchen. Es sind dies die Versicherungskasse für die eidgenössischen Beamten, Angestellten und Arbeiter (E. V. K.) und die Pensions- und Hilfskasse der Schweizerischen Bundesbahnen (P. H. K.).

Unser Beobachtungsmaterial stammt aus den Jahren 1930 bis 1937 und umfaßt 116 126 ein Jahr unter Beobachtung gestandene Invalide.

Die theoretischen Probleme, die im Zusammenhang mit der Konstruktion von Invaliden-Selektions-Sterbetafeln auftreten, sowie die praktischen Resultate, welche uns über die Zweckmäßigkeit der Verwendung solcher Tafeln Aufschluß geben, sollen Behandlungsgegenstand der nachfolgenden Ausführungen sein.

Es wurde angenommen, daß für die Aktiven eine nur nach Alter abgestufte Sterbetafel genügen würde und daß bei den Invaliden eine Reaktivierung ausgeschlossen sei.

I. Kapitel.

Eine exakte Methode zur Bestimmung der rohen Invaliden-Selektions-Sterbenswahrscheinlichkeiten aus dem Beobachtungsmaterial

Bei Sterbenswahrscheinlichkeiten, die man als nur vom Alter abhängig betrachtet hat, sind verschiedene exakte Methoden angegeben worden (vgl. z. B. [1] Abschnitt: Sterblichkeitsmessung), welche ihre Berechnung aus dem Beobachtungsmaterial in relativ einfacher Weise erlauben. Diese Angaben sind bei Invalidensterbenswahrscheinlichkeiten, welche Funktionen des Alters und der Invaliditätsdauer sind, weit weniger zahlreich.

Es scheint uns deshalb nicht unnütz zu sein, eine exakte Methode anzugeben, welche uns die Berechnung der Wahrscheinlichkeit $q^i(x, t)$ aus dem Beobachtungsmaterial gestattet.

Zur Erläuterung der nachfolgenden Begriffe und der Bezeichnungsweise betrachten wir in Anlehnung an Czuber [1] folgende Fig 1:

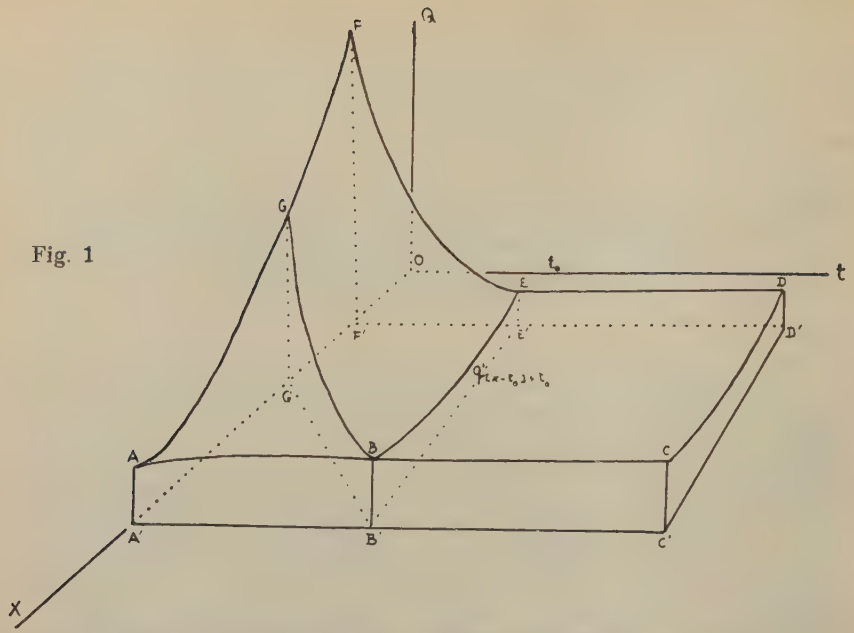
Wir bezeichnen mit

x das erreichte Alter eines Invaliden in Jahren,
t die Dauer seit Eintritt der Invalidität,
$[x-t]$ das Alter des Invaliden im Momente des Eintritts der Invalidität,
$[x-t] \dashv t$ das erreichte Alter eines vor t Jahren im Alter $[x-t]$ invalidierten Mitgliedes.

Mit $q^i_{[x-t]+t}$ bezeichnen wir die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen Invaliden, der vor t Jahren, d. h. im Alter $[x-t]$ invalid geworden ist.

Im rechtwinkligen System O(XtQ) sei OX die Achse der Alter, Beitritts- und Beobachtungsalter, Ot die Zeitachse für

Fig. 1



die seit dem Eintritt der Invalidität verflossene Zeit; in der Richtung der dritten Achse OQ werden die Sterbenswahrscheinlichkeiten $q^i_{[x-t]+t}$ aufgetragen.

Die beobachteten Werte $q^i_{[x-t]+t}$ befinden sich dann auf einer Fläche, die im allgemeinen erst mit Hilfe der Ausgleichung zu einer glatten wird.

Schneiden wir die Fläche mit zu tQ parallelen Ebenen, so erhalten wir bei konstantem Alter den Sterblichkeitsverlauf nach der seit der Invalidierung verflossenen Zeit.

Der zu Xt normale, zu XQ unter 45° geneigte Schnitt BG gibt uns den Verlauf von $q^i_{[x]+t}$ bei festem $[x]$.

Schnitte parallel zur XQ Ebene ergeben Sterbenswahrscheinlichkeiten mit gleicher Invalidierungsdauer. Insbesondere gibt uns die Schnittkurve AF in der XQ Ebene den Verlauf der Invalidensterbenswahrscheinlichkeit zur Zeit des Eintrittes in den Invalidenbestand.

t_o soll dadurch definiert sein, daß für $t \geq t_o$ $q^i_{[x-t]+t}$ unabhängig von t wird. Die Fläche BCDE hat dann die Gestalt eines Zylinders mit Seitenlinien parallel zu Ot, wobei wir die Kurve BE als Schlußkurve bezeichnen.

Mit Hilfe dieser Erläuterungen können wir nun die im Gebrauche stehenden verschiedenartigen Sterbetafeln kennzeichnen.

Die Aggregattafel auch als Summar-Gesamt- oder Durchschnittssterbetafel bezeichnet, sieht völlig von der Invaliditätsdauer ab, stellt also die Sterblichkeit nur als Funktion des Alters dar.

Bezeichnen wir mit

$J_{[x-t]+t}$ die x-jährigen Invaliden, die vor t Jahren, im Alter $[x-t]$ invalidiert wurden,

$T^i_{[x-t]+t}$ die von diesen Invaliden im Laufe eines Jahres, also vor Erreichung des Alters $x+1$ und der Invaliditätsdauer $t+1$, Gestorbenen,

so ist $q^i_{[x-t]+t}$ gegeben durch den Ausdruck:

$$q^i_{[x-t]+t} = \frac{T^i_{[x-t]+t}}{J_{[x-t]+t}}. \tag{1}$$

Die Formel für den Aggregatwert lautet dann:

$$q^i_x = \frac{T^i_x}{J_x}, \tag{2}$$

wo $T^i_x = \sum_{t=0}^{\omega 2} T^i_{[x-t]+t}$ und $J_x = \sum_{t=0}^{\omega 2} J_{[x-t]+t}$ ist.

ω_2 bedeutet die höchste Invaliditätsdauer.

Lassen wir die Beobachtungen der ersten t_o Invaliditätsjahre weg, dann berechnet sich ${}^{(t_o)}q^i_x$ nach der Formel:

$${}^{(t_o)}q^i_x = \frac{{}^{(t_o)}T^i_x}{{}^{(t_o)}J_x}, \tag{3}$$

wobei ${}^{(t_o)}T^i_x = \sum_{t=t_o}^{\omega 2} T^i_{[x-t]+t}$ und ${}^{(t_o)}J_x = \sum_{t=t_o}^{\omega 2} J_{[x-t]+t}$.

Solche Absterbeordnungen bezeichnet man als um t_o Jahre abgestutzte Aggregattafeln oder auch als Schlußtafeln.

Nach Sprague [2] bezeichnet man als Selekttafel eine solche Tafel, welche die Sterbenswahrscheinlichkeiten einer An-

fangsperiode, etwa der ersten t_o Jahre, nach Alter und Invaliditätsdauer zur Darstellung bringt.

Diejenige Tafel, die den Verlauf der Sterbenswahrscheinlichkeiten in vollständigerer Weise zum Ausdruck bringt, ist ersichtlich eine Verbindung von Selekttafel mit Schlußtafel. Die so entstehende kombinierte Tafel bezeichnet man als zweifach- oder doppelt abgestufte Sterbetafel. Der Einfachheit halber wollen wir aber in unseren nachfolgenden Ausführungen auch den Ausdruck Selektions-Sterbetafel dafür gelten lassen.

Betrachten wir die Invalidensterblichkeit als nur von der Invaliditätsdauer abhängig, dann erhalten wir für q_t^i die Formel:

$$q_t^i = \frac{T_t^i}{J_t}, \tag{4}$$

wobei $T_t^i = \sum_{x=x_o}^{\omega} T_{[x-t]+t}^i$ und $J_t = \sum_{x=x_o}^{\omega} J_{[x-t]+t}$, $x_o \geq t$.

Diese so entstehenden Sterbetafeln bezeichnet P. Smolensky [3] als Kompakt-Tafeln (tavole compatta).

Wir begnügen uns vorläufig mit dem Hinweis auf diese Sterbetafeln. Andere werden wir dann noch im Verlaufe unserer Ausführungen im III. Kapitel kennen lernen.

Nach diesen einführenden Erläuterungen wollen wir nun an einem Beispiel die Herstellung der Selektions-Sterbenswahrscheinlichkeiten, wie sie aus dem Beobachtungsmaterial abgeleitet werden, zur Darstellung bringen.

Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeitswerte aus dem Beobachtungsmaterial, gelingt es uns nicht, diese für bestimmte Punkte der Ebene, d. h. für genaue x und t zu berechnen. Wir werden daher zweckmäßig das Absterben von Gesamtheiten betrachten, welche entweder

1. genau x Jahre alt und $\tilde{t}$ Jahre invalid sind,

   wobei $t - \frac{1}{2} < \tilde{t} \leq t + \frac{1}{2}$ ist,

oder

2. genau t Jahre invalid und $\tilde{x}$ Jahre alt sind,

wobei $x - \frac{1}{2} < \tilde{x} \leq x + \frac{1}{2}$ ist.

x und t bewegen sich dabei ihrer Bedeutung gemäß im Bereich der positiven ganzen Zahlen.

Da wir im folgenden hauptsächlich den Einfluß der Invaliditätsdauer auf die Sterblichkeit der Invaliden untersuchen wollen, so gehen wir deshalb von Gesamtheiten aus, die der 2. Annahme gemäß zusammengesetzt sind.

Zur Erläuterung der Berechnung der $q^{i}_{[\tilde{x}-t]+t}$ aus dem Beobachtungsmaterial treffen wir folgende Annahmen:

1. Die Beobachtungsperiode erstrecke sich über k Jahre. Sie umfasse das Zeitintervall $(\tau, \tau + k)$, wo mit τ das Kalenderjahr des Beginns bezeichnet wird und mit $\tau + k$ die Erhebungszeit.
2. Austritte aus der Invalidengesamtheit erfolgen nur durch Tod. Reaktivierung der Invaliden ist somit ausgeschlossen.
3. Für jeden Invaliden werde eine Karte angelegt, auf der Geburtsdatum und Datum der Invalidierung aufgeschrieben sind. Bei Todesfällen wird das Datum des Todes auf die Karten geschrieben und diese in einer besonderen Kartothek nach Todesjahren geordnet.

Unsere nachfolgenden Ausführungen soll uns Fig. 2 veranschaulichen.

Auf der Zeitachse OT befinden sich die Neuinvaliden des Alters $[\tilde{x}-t]$. Alle Invaliden, welche dasselbe Alter und dieselbe Invalidierungsdauer haben, befinden sich auf den zu OT parallelen Linien.

Auf der Achse OXt und den dazu parallelen Geraden sind die in einem bestimmten Zeitpunkt vorhandenen Invaliden nach Alter und Invalidierungsdauer geordnet. Die Lebenslinien der Invaliden sind parallel zu AE.

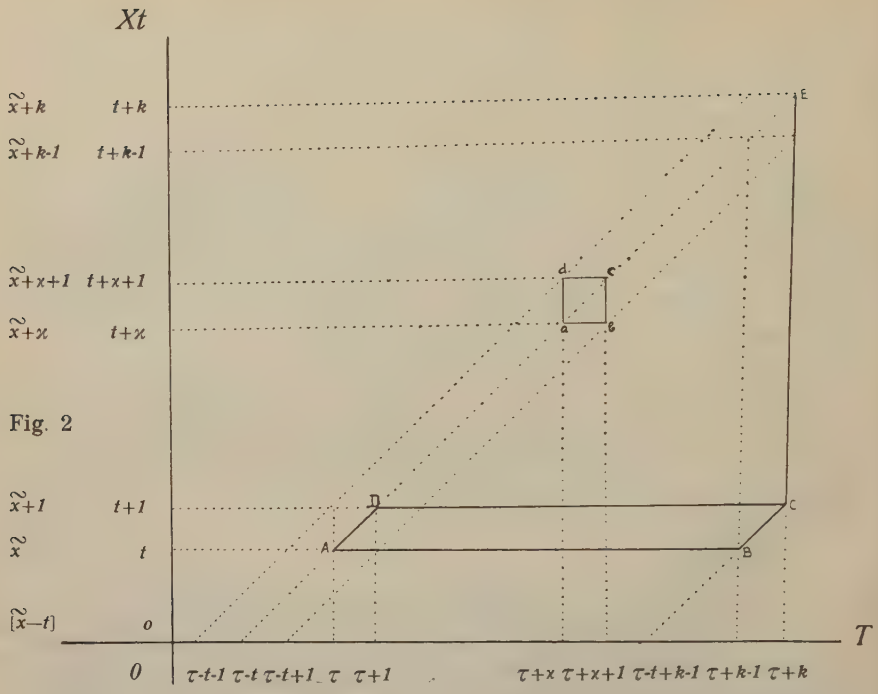


Fig. 2

Die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit des $\tilde{x}$-jährigen Invaliden, der vor t Jahren invalid geworden ist, wird auf Grund folgender Beziehung ermittelt:

$$(5)\quad q^{i}_{[\tilde{x}-t]+t} = \frac{\text{Anzahl der im Parallelogramm ABCD gestorbenen Invaliden}}{\text{Anzahl der im Intervall AB vorhandenen Invaliden}}$$

Auf Grund unserer getroffenen Annahmen 1.—3. handelt es sich nun darum, Zähler und Nenner dieses Bruches zu berechnen.

Wir werden unsere Statistik so anlegen, daß wir die im Erhebungszeitpunkt $\tau+k$ vorhandenen Invaliden nach Alter und Invaliditätsdauer gruppieren. Besondere Sorgfalt ist dabei auf die Bestimmung des Alters zu legen. Wir wollen Sterbenswahrscheinlichkeiten von Invalidengesamtheiten betrachten, welche genau t Jahre invalid und $\tilde{x}$ Jahre alt sind; wobei $x-\frac{1}{2}<\tilde{x}\leq x+\frac{1}{2}$ ist. Zu diesem Zwecke müssen wir das Alter eines Invaliden einschätzen, in dem Moment, da der Invalide im

Jahre $(\tau+k-1, \tau+k)$ genau t Jahre invalid geworden ist. Es sei beispielsweise ein Versicherter am 1. Januar 1900 geboren und am 2. Juli 1930 invalid geworden. Der Erhebungszeitpunkt $\tau+k$ sei der 31. Dezember 1937. Der Versicherte war also am 2. Juli 1937 genau sieben Jahre invalid und hatte in diesem Zeitpunkt ein Alter von 37 Jahre 6 Monate 1 Tag. Wir schätzen ihn deshalb mit dem Alter $\overset{\sim}{38}$ ein und ordnen ihm die Zahlen $\overset{\sim}{38},7$ zu.

Auf der Strecke EC befinden sich alle Invaliden, die im Zeitpunkt $\tau+k$ das Alter $\tilde{x}+1$ und die Invaliditätsdauer $t+1$ erreicht bezw. überschritten haben, aber noch nicht $\tilde{x}+k$ Jahre alt und $t+k$ Jahre invalid sind.

Die Anzahl der im Intervall AB vorhandenen Invaliden erhalten wir, wenn wir zu der Gesamtheit EC die im Trapez ABCE verstorbenen Invaliden der Gesamtheit AB addieren.

Die Statistik der Toten, die wir alljährlich im Zeitraum $(\tau, \tau+k)$ machen, dürfen wir dabei nicht nur, wie die der Lebenden, nach Alter und Invalidierungsdauer gruppieren. Als weiteres Abhängigkeitsmoment muß noch der Invalidierungszeitpunkt berücksichtigt werden.

Alle Toten, die beispielsweise im Jahre $(\tau+x, \tau+x+1)$ das Alter $\tilde{x}+x$ und die Invalidierungsdauer $t+x$ zurückgelegt haben, aber noch nicht $\tilde{x}+x+1$ Jahre alt und $t+x+1$ Jahre invalid sind, befinden sich im Quadrat abcd. Diese Gesamtheit stammt aus dem Invalidierungszeitraum $(\tau-t-1, \tau-t+1)$. Zur Berücksichtigung der im Trapez ABCE verstorbenen Invaliden brauchen wir aber nur die Toten des Dreiecks abc. Die Annahme der gleichmäßigen Verteilung der Toten im Quadrat abcd ist unberechtigt, da die Anzahl der Lebenslinien auf ad verschieden ist von der auf ab. Es werden im allgemeinen im Jahre $(\tau-t-1, \tau-t)$ nicht gleichviel invalid werden wie im Jahre $(\tau-t, \tau-t-1)$.

Wir wollen nun Gleichung (5) ausführlicher darstellen und geben zur Erläuterung der nachfolgenden Bezeichnungsweise folgende Erklärung:

Es bedeuten:

$J_{[\tilde{x}-t]+t}$ die Invaliden, welche im Erhebungszeitpunkt $\tau + k$ des Alter $\tilde{x}$ und die Invaliditätsdauer t erreicht bzw. überschritten haben, aber noch nicht $\tilde{x}+1$ Jahre alt und $t+1$ Jahre invalid sind,

ferner:

$T^i_{\{[\tilde{x}-t]+t;\ \tau,\ \tau+k\}}$ die Invaliden, welche im Zeitraum $(\tau,\ \tau+k)$ neu entstanden sind, das Alter $\tilde{x}$ und die Invaliditätsdauer t zurückgelegt haben, aber vor der Erreichung der Invaliditätsdauer $t+1$ gestorben sind.

Während der Selektionsperiode, also für $t<t_o$ ergibt sich für $q^i_{[\tilde{x}-t]+t}$ die Formel:

$$(6)\qquad q^i_{[\tilde{x}-t]+t} = \frac{T^i_{\{[\tilde{x}-t]+t;\ (\tau-t,\ \tau-t+k-1)\}}}{\sum_{\nu=1}^{k-1} J_{[\tilde{x}-t]+t+\nu} + \sum_{\nu=o}^{k-1} T^i_{\{[\tilde{x}-t]+t+\nu;\ (\tau-t,\ \tau-t+k+1)\}}}$$

Ist $t\geq t_o$, so wird ${}^{(t_o)}q^i_{\tilde{x}}$ unabhängig von t, und wir erhalten für die Schlußtafel die Formel:

$$(6')\qquad {}^{(t_o)}q^i_{\tilde{x}} = \frac{\sum_{\mu=t_o}^{\omega_2} T^i_{\{[\tilde{x}-\mu]+\mu;\ (\tau-\mu,\ \tau-\mu+k-1)\}}}{\sum_{\mu=t_o}^{\omega_2}\left\{\sum_{\nu=1}^{k-1} J_{[\tilde{x}-\mu]+\mu+\nu} + \sum_{\nu=o}^{k-1} T^i_{\{[\tilde{x}-\mu]+\mu+\nu;\ (\tau-\mu,\ \tau-\mu+k-1)\}}\right\}}$$

Wir erhalten so eine Formel, die uns gestattet, die Selektions-Sterbenswahrscheinlichkeit des Invaliden unmittelbar aus dem Beobachtungsmaterial herzuleiten. Wir müssen nur zur Bestimmung der Toten- und Lebendengesamtheiten die angegebene Anordnung der Statistik befolgen.

II. Kapitel.

Ausgleichungsmethoden für Invaliden-Selektions-Sterbetafeln

Die Wahrscheinlichkeitswerte $q^t_{[x-t]+t}$ sind Funktionen zweier Variabeln. Ihre rohen Beobachtungswerte befinden sich auf einer nicht stetig differenzierbaren Fläche. Aufgabe der Ausgleichungsrechnung ist es nun, eine Fläche zu finden, welche die Beobachtungspunkte möglichst genau wiedergibt und die durch den Zufall verursachten Unregelmäßigkeiten beseitigt.

Sterbetafeln, bei denen man annimmt, daß das Makehamsche Gesetz gelte, werden nach Kurven mit konstantem t ausgeglichen, wobei man für jedes t andere Konstanten zu wählen hat; diese also Funktionen von t sind. Wir begnügen uns an dieser Stelle mit einem Hinweis auf Abhandlungen von H. Poterin du Motel [4], A. Patzig [5] und W. Schweer [6].

Im weiteren hat E. Blaschke [7] den Versuch unternommen, unter Benutzung der Bruns'schen Entwicklung zweifach abgestufte Tafeln auszugleichen.

Wir wollen uns im folgenden nur mit der Theorie der analytischen, mechanischen und graphischen Ausgleichung von Invaliden-Selektions-Sterbetafeln befassen und vorerst einen kurzen Ueberblick über die in der Praxis benutzten Ausgleichungsmethoden geben.

A. Aeltere Methoden.

Den ersten Versuch, eine doppelt abgestufte Invalidensterbetafel analytisch auszugleichen, hat der dänische Versicherungsmathematiker Olsen [8] unternommen. Olsen betrachtet die Invaliditätsdauer als Parameter, durch dessen Variation

eine Schar von Sterbekurven entsteht. Die Schlußkurve ist eine Grenzkurve dieser Sterbekurven. Man erhält sie, wenn man den Parameter unendlich groß werden läßt.

Die Ausgleichungsformel von Olsen besitzt folgende Gestalt:

$$(7) \qquad -\log l^i_{[x-t]+t} = a_1 x + 10^{a_2 x + a_3} + 10^{a_4 - a_5 (x-t-a_6)^2 - a_7 t - a_8 2^t}$$

und daraus ergibt sich die Schlußkurve für $t = \infty$

$$(7') \qquad -\log l^i_x = a_1 x + 10^{a_2 x + a_3}.$$

$a_1, a_2, \ldots\ldots a_8$ sind positive Konstanten.

Jörgensen schreibt in seiner Arbeit [8], daß es nicht genau festzustellen war, wie Olsens Formel entstanden ist. Man nimmt jedoch an, daß bei der Schlußkurve die Makehamsche Formel als Grundlage benutzt wurde und daß der Einfluß der Invaliditätsdauer bei den Sterbekurven durch Zusatzglieder festgestellt werden konnte. Eine große Ungenauigkeit besteht aber darin, daß Olsen die Erfahrungen aus dem ersten Invaliditätsjahr nicht berücksichtigt hat. Jörgensen kommt dann nach Ausmerzung dieser Ungenauigkeit zu einer Formel, die folgende Gestalt besitzt:

$$(8) \qquad -\log l^i_{[x-t]+t} = a + b\,x + 10^{c x + d} + 10^{P(x,t) + f \cdot g^t + f_1 \cdot g_1^{x-t}},$$

$P(x, t)$ ist ein Polynom 2^{ten} Grades in den Variabeln x und $x—t$. $a, b, c, d, f, g, f_1, g_1$ sind Konstanten.

Zu dieser Formel macht Jörgensen eine Anwendung aus einem Beobachtungsmaterial, das in den amtlichen Nachrichten des Reichsversicherungsamtes erschienen ist. Er bemerkt dabei selber, daß die Resultate nicht überall befriedigend sind und bringt einen anderen Vorschlag zur analytischen Darstellung der Invalidensterblichkeit.

Er geht von dem Gedanken aus, daß der Verlauf der Invalidensterblichkeit im ersten Invaliditätsjahr gut durch die Oppermann'sche Kindersterbeformel $\mu_x = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x}$ ausgedrückt werden kann und kommt zu folgender Formel:

(9) $$\log l^i_{[x-t]+t} = P_n(\sqrt{x-t}, \sqrt{t}) + f \cdot g^{\sqrt{x-t}} + f_1 \cdot g_1^{\sqrt{t}},$$

wobei P_n ein Polynom n^{ten} Grades bedeutet.

Karup [9] hat zur Ausgleichung der Tafel der Gotha: „Deutsche Eisenbahnbeamte, Invalide aus dem Nichtfahrpersonal 1877—89" ebenfalls eine analytische Methode benutzt. Es handelt sich dabei um die Ausgleichung einer 12-stufigen Selektionstafel.

Zunächst erhält Karup für die Schlußtafel, d. h. für $\nu \geq 11$ und $p^i_{x+\nu} = p^i_{[x]+\nu}$, die Makehamsche Formel:

(10) $$\log \frac{1}{p^i_{x+\nu}} = \alpha + \beta\, c^{x+\nu}.$$

Diese Formel wird für $\nu < 11$ ebenfalls durch Zusatzglieder ergänzt.

$$\log \frac{1}{p^i_{[x]+\nu}} = \log \frac{1}{p^i_{x+\nu}} + \upsilon_x\, \sigma^\nu + \varphi_x \frac{1}{\chi^\nu};$$

(10′) $$\sigma_\nu = \frac{1}{\varkappa_\nu} - \frac{1}{\varkappa_{\nu+1}}, \quad \varkappa_\nu = \varkappa^{\nu\sqrt{\nu}} + \left(\frac{\nu}{2}\right)^5,$$

$$\upsilon_x = b\, c^{-\frac{x}{2}}, \quad \log \varphi_x = \gamma - \delta x - \varepsilon c^x,$$

$\alpha, \beta, c, \chi, \varkappa, b, \gamma, \delta, \varepsilon$ sind Konstanten.

Betreffs Anwendung dieser Formel auf das Beobachtungsmaterial der Bahnen des Vereins Deutscher Eisenbahn-Verwaltungen „Invalide aus dem Nichtfahrpersonal von 1877—89" verweisen wir auf die Originalliteratur [9].

Die Methode zur Ausgleichung der Invalidensterbenswahrscheinlichkeiten, wie sie nach den Erfahrungen der schwedischen Pensionsversicherung von 1921—25 berechnet wurden, beschreibt B. Wingborg [10].

Die rohen Ausscheidewahrscheinlichkeiten der Invaliden wurden für konstante t nach Wittstein ausgeglichen. Die so erhaltenen erstmals ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten

sind dann aufgezeichnet und unter Berücksichtigung folgender Gleichungen graphisch ausgeglichen worden:

$$\frac{1}{5}(q^i_{[x]} - q^i_{[x-1]+1}) = \frac{1}{4}(q^i_{[x-1]+1} - q^i_{[x-2+2]}) = \frac{1}{3}(q^i_{[x-2)+2} - q^i_{[x-3]+3}$$

(11)
$$= \frac{1}{2}(q^i_{[x-3]+3} - q^i_{[x-4]+4}) = (q^i_{[x-4]+4} - {}^{(5)}q^i_x).$$

Der Einfluß der Invaliditätsdauer auf die Sterblichkeit der Invaliden macht sich in den Grenzen

$$15 \leq x \leq 70 \text{ und } 0 \leq t \leq 5$$

geltend.

Die Schlußtafel wird bei $t \geq 5$ angenommen. Nach dem 70. Altersjahr verschwindet der Einfluß der Selektion.

Eine sehr einfache mechanische Ausgleichsmethode gibt Czuber [1] (pag. 201) an. Es handelt sich um eine Beziehung, die der bekannten Wittstein Formel nachgebildet ist.

Es sei u'_{xt} die ausgeglichene Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen Invaliden, der t Jahre dem Invalidenbestand angehört. u_{xt} bezeichne den entsprechenden rohen Beobachtungswert.

Czuber bedient sich der folgenden Formel:

(12)
$$u'_{xt} = \frac{1}{5}(u_{xt} + u_{x-1,t} + u_{x+1,t} + u_{x,t-1} + u_{x,t+1}).$$

Ein Nachteil dieser Methode besteht darin, daß die Randwerte nicht ausgeglichen werden.

Zusammenfassend ist zu diesen Ausgleichungsmethoden folgendes zu bemerken:

Die bisher zur Ausgleichung von Selektions-Sterbetafeln verwendeten analytischen Ausgleichungsmethoden kann man nach zwei Gesichtspunkten trennen.

1. Ausgleichungen nach Kurven (vgl. Czuber [1] pag. 201).
2. Ausgleichungen mit dem Bestreben eine Funktion $f(x\ t)$ zu finden, welche im ganzen Definitionsgebiet die beobach-

teten Sterbenswahrscheinlichkeiten möglichst genau wiedergibt.

Betreffs Anwendung dieser Methoden zur Ausgleichung von Invaliden-Selektions-Sterbetafeln ist zu sagen, daß eine Ausgleichung nach Kurven das Vorhandensein eines Invalidensterbegesetzes voraussetzt. Die zweite Methode führt auf komplizierte analytische Ausdrücke, ohne daß man sich dabei auf theoretische Prinzipien stützen könnte, die die Frage zu entscheiden gestatteten, durch diese Ausgleichung den wahren Werten näher gekommen zu sein.

Bei den mechanischen und graphischen Methoden ist die Theorie noch wenig ausgebaut, kann aber, wie z. B. B. Wingborg [10] gezeigt hat, schon zu ganz annehmbaren Resultaten führen.

Im nächsten Abschnitt wollen wir eine neuartige amerikanische, mechanische Ausgleichungsmethode ausführlich darlegen.

B. Die Methode von E. H. Wells [11].

Bevor wir von der von Wells benutzten Ausgangsformel ausgehen, wollen wir deren wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen untersuchen.

Die meisten Ausgleichungsmethoden erfüllen in praktischer Hinsicht ihren Zweck, hingegen sind nicht alle vom rein theoretischen Standpunkt aus betrachtet, befriedigend, weil sie zuviele willkürliche Elemente enthalten.

Whittaker [12] faßt das Ausgleichungsproblem dahin auf, durch Kombination der beobachteten Werte einer Funktion mit a priorischen Ueberlegungen die wahrscheinlichsten Werte dieser Funktion zu den beobachteten Argumentwerten zu finden.

Von einer Funktion u_x sei eine Folge von Beobachtungswerten $u_1 \ldots . u_n$ gegeben. Diese stellten die wahrscheinlichsten Werte der Funktion dar, wenn nicht a priori Gründe dafür bestünden, daß sie Unsicherheiten oder Unregelmäßigkeiten enthalten, welche auf zufällige Beobachtungsfehler zurückzu-

führen sind. Es werden deshalb die Werte $u_i (i = 1, 2 \ldots, n)$ nicht auf einer glatten Kurve liegen, trotzdem eine große Wahrscheinlichkeit dafür besteht, daß beim Vorliegen von genaueren Beobachtungen sie auf einer solchen lägen. Das Wort „glatt" kann etwa dadurch näher präzisiert werden, daß man sagt, die dritten Differenzen $\triangle^3 u_x$ sollen möglichst klein werden.

Whittaker betrachtet dann folgende Hypothese H:

Die wahren Werte, die zu den Beobachtungswerten u_i $(i=1, 2 \ldots, n)$ gehören, liegen zwischen u'_1 und $u'_1 + \sigma$, u'_2 und $u'_2 + \sigma$ usw. u'_n und $u'_n + \sigma$, wobei σ eine kleine Konstante bedeutet, z. B. eine Einheit in der letzten Dezimalstelle, die bei der Messung noch berücksichtigt wurde.

Bevor die Beobachtungen vorliegen, haben wir keinen Anhaltspunkt über den Wert der Wahrscheinlichkeit der Hypothese H mit Ausnahme des Grades der Glätte der Folge $u'_1, \ldots, u'_n$. Die Glätte der Kurve, auf der sich die Folge der Werte $u'_1, \ldots, u'_n$ befindet, soll durch die Summe der Quadrate der dritten Differenzen von u'_x, gemessen werden.

Es ist

$$S = (u'_4 - 3u'_3 + 3u'_2 - u'_1)^2 + (u'_5 - 3u'_4 + 3u'_3 - u'_2)^2 + \ldots + (u'_n - 3u'_{n-1} + 3u'_{n-2} - u'_{n-3})^2 . \tag{13}$$

Mit S bezeichnet Whittaker das Maß der Unregelmäßigkeit (measure of roughness) der Folge $u'_1 \ldots\ldots u'_n$.

Unter der Voraussetzung einer Normal-Verteilung ist die Wahrscheinlichkeit a priori p der Hypothese H

$$p = c\, e^{-\lambda^2 S \sigma^n}, \tag{14}$$

wo c und λ Konstanten sind.

Nun fragt Whittaker nach der Wahrscheinlichkeit a priori, daß die durch die Beobachtung gewonnenen Maßzahlen $u_1, u_2 \ldots u_n$ seien, vorausgesetzt, daß die Hypothese H zutrifft. Da dann der wahre Wert des ersten Beobachtungswertes u'_1 ist, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß ein Wert zwischen u_1 und $u_1 + \sigma$ beobachtet wird, wenn das Gauß'sche Fehlergesetz postuliert wird

$$\frac{h_1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_1^2 (u_1 - u_1')^2} \cdot \sigma,$$

wo h_1 das Präzisionsmaß für die Beobachtungsgröße ist.

Bezeichnen wir daher mit P die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenn die Hypothese H zutrifft, die beobachteten Werte zwischen u_1 und $u_1 + \sigma$ und $u_2 + \sigma$ usw. u_n und $u_n + \sigma$ liegen, so läßt sich P auf folgende Weise bestimmen:

(15) $$P = \frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n}\, e^{-F} \sigma^n,$$

wobei $$F \equiv h_1^2 (u_1 - u_1')^2 + h_2^2 (u_2 - u_2')^2 + \ldots + h_n^2 (u_n - u_n')^2.$$

Die Summe S ist der numerische Ausdruck für die „Glätte" der ausgeglichenen Werte und die Summe F derjenige für die Anschmiegung der ausgeglichenen an die unausgeglichenen Werte.

Nach dem Theorem von Bayes ist, wenn wir annehmen, daß ein Beobachtungsphänomen einer bestimmten Anzahl von möglichen Hypothesen zugeschrieben werden kann, von denen aber eine und nur eine wirklich eintritt, die Wahrscheinlichkeit, daß H_s die wirkliche Hypothese war

(16) $$\frac{p_s \cdot P_s}{\sum p_s \cdot P_s},$$

wobei über alle vorkommenden Hypothesen summiert wird und wo p_s die Wahrscheinlichkeit der Hypothese H_s vor Eintritt des Ereignisses und P_s die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses ist, unter der Annahme, daß die Hypothese H_s wirklich zutrifft.

Es folgt daraus, daß nachdem die Werte $u_1 \ldots . u_n$ beobachtet wurden, die wahrscheinlichste Hypothese diejenige ist, für welche das Produkt:

$$p\,P = \frac{c\, h_1 h_2 \ldots . h_n}{(\sqrt{\pi})^n}\, e^{-\lambda^2 S - F} \cdot \sigma^{2n}$$

ein Maximum wird, d. h. die wahrscheinlichste Folge der $u_1' \ldots u_n'$ ist diejenige, für welche

(17) $\lambda^2 S + F$

ein Minimum ist.

Will man nun in einer Ausgleichung die beobachteten Werte stark glätten, so kann man beispielsweise für S setzen:

$$S = \sum (\triangle u_x)^2.$$

Wir erhalten so die Bedingung:

(18) $$\lambda^2 \sum_{x=1}^{n} (\triangle u'_x)^2 + \sum_{x=1}^{n} h_x^2 (u_x - u'_x)^2 = \text{Minimum.}$$

Durch Differentiation nach $u'_1 \ldots u'_n$ erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
h_1^2 u_1 &= h_1^2 u'_1 - \lambda^2 \triangle u'_1, \\
h_2^2 u_2 &= h_2^2 u'_2 - \lambda^2 \triangle u'_2 + \lambda^2 \triangle u'_1, \\
&\vdots \\
h_{n-1}^2 u_{n-1} &= h_{n-1}^2 u'_{n-1} - \lambda^2 \triangle u'_{n-1} + \lambda^2 \triangle u'_{n-2}, \\
h_n^2 u_n &= h_n^2 u'_n + \lambda^2 \triangle u'_{n-1}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Führen wir neue Größen u_o und u_{n+1} so ein, daß

$$\triangle u_o = o, \qquad \triangle u_n = o,$$

so bekommen wir n Gleichungen von der Form

(20) $$h_x^2 u_x = h_x^2 u'_x - \lambda^2 \triangle^2 u'_{x-1}.$$

Setzen wir noch:

$\triangle^2 u'_{x-1} = \delta^2 u'_x$, $h_1^2 = k \lambda^2$ und vereinfachend

$$h_1 = h_1 = h_3 = \ldots = h_n,$$

wo δ^2 bekanntlich die zentrale Differenz 2. Ordnung bedeutet, so erhalten wir als Bedingung dafür, daß (18) ein Minimum wird:

(21) $$u_x = u'_x - \frac{1}{k} \delta^2 u'_x.$$

Wells benützt als Grundlage seiner weiteren Ausführungen diese Gleichung, die er in etwas abgeänderter Form in folgender Weise angibt:

(21′)
$$r'_x = \frac{1}{1+a}(r''_x + a\, r'_{x-1}),$$
$$r_x = \frac{1}{1+a}(r'_x + a\, r_{x+1}).$$

Nach r'' aufgelöst erhält man bei Verwendung der Symbole der Differenzenrechnung

$$r''_x = (1+a\triangle E^{-1})(1-a\triangle)\, r_x = [1-(a^2+a)\,\delta^2]\, r_x$$

Dies ist, wie wir leicht einsehen, wieder Formel (21),

wobei $a^2+a=\frac{1}{k}$, $r''_x = u_x$ und $r_x = u'_x$ ist.

r''_x sind die rohen, r'_x die einmal und r_x die zweimal ausgeglichenen Wahrscheinlichkeitswerte.

Der Grund, warum die angegebene Ausgleichungsformel in der Praxis nie benutzt worden ist, scheint in dem Umstand zu suchen zu sein, daß die auszugleichenden Werte zu stark geglättet und evtl. auftretende typische Schwankungen verwischt werden.

Wells geht nun von dem Gedanken aus, die Verhältniszahlen, gebildet aus den auszugleichenden Beobachtungswerten und den ausgeglichenen Werten einer analogen, bekannten, sogenannten Standardtafel zu betrachten.

Bei allen Sterbetafeln, welche einem gleichartigen Beobachtungsmaterial entstammen, wird ein gewisser typischer Verlauf oder mit andern Worten ausgedrückt, eine bestimmte positive Korrelation festzustellen sein.

In der neugeschaffenen Tafel werden sich somit die diesbezüglichen Verhältniszahlen um wenig voneinander unterscheiden und nur zufällige Schwankungen in den rohen Werten, die z. B. durch die Knappheit des Beobachtungsmateriales bedingt sind, werden stark abweichende Zahlen ergeben. Diese werden aber durch die angegebene Ausgleichung wieder stark geglättet werden.

Zur Ausgleichung von Selektionstafeln erweitert Wells die Whittaker'sche Formel.

Die auszugleichenden rohen Sterbenswahrscheinlichkeiten wollen wir mit $\overline{q}^{i}_{[x]+t}$, die ausgeglichenen Werte der bekannten Standardtafel mit ${}^{1}q^{i}_{[x]+t}$ bezeichnen.

$\bar{r}_{x:t}$ soll dann das Verhältnis $\frac{\bar{q}^{i}_{[x]+t}}{{}^{1}q^{i}_{[x]+t}}$ bedeuten.

Die $\bar{r}_{x:t}$ werden nun in der bekannten Weise in einer Tabelle mit doppeltem Eingang so angeordnet, daß in den Kolonnen x und in den Zeilen t variiert wird.

x und t bewegen sich dabei in dem Bereich $\alpha \leq x \leq \omega$, $o \leq t \leq m$.

Eine Tafel mit erstmals ausgeglichenen Werten $r'_{x:t}$ wird auf Grund folgender Formel konstruiert:

$$r'_{x:t} = \frac{1}{1+a+b}\left[\bar{r}_{x:t} + a\, r'_{x:t-1} + b\, r'_{x+1:t}\right]. \tag{22}$$

a und b sind zum voraus bestimmte numerische Konstanten. Es sind willkürlich eingesetzte Gewichte, von deren Wahl jedoch die ausgeglichenen Werte abhängig sind.

Die Ausgleichung beginnt mit folgender Annahme:

$r'_{x:o} = \bar{r}_{x:o}$ und $r'_{\omega:t} = \bar{r}_{\omega:t}$ für alle x und t.

Die zweimal ausgeglichenen Werte $r''_{x:t}$ erhält man mit Hilfe der Formel:

$$r''_{x:t} = \frac{1}{1+a+b}\left[r'_{x:t} + a\, r''_{x:t+1} + b\, r''_{x-1:t}\right], \tag{23}$$

beginnend mit

$$r''_{x:m} = r'_{x:m} \quad \text{und} \quad r''_{a:t} = r'_{a:t}.$$

Zum drittenmal wird ausgeglichen nach der Formel:

$$r'''_{x:t} = \frac{1}{1+a+b}\left[r''_{x:t} + a\, r''_{x:t+1} + b\, r'''_{x+1:t}\right], \tag{24}$$

beginnend mit $r'''_{x:m} = r''_{x:m}$ und $r'''_{\omega:t} = r''_{\omega:t}$.

Die endgültig ausgeglichenen Werte erhält man, wenn man die folgende Gleichung benutzt:

$$r_{x:t} = \frac{1}{1+a+b}\left[r'''_{x:t} + a\, r_{x:t-1} + b\, r_{x-1:t}\right] \tag{25}$$

mit der Annahme:

$$r_{x:o} = r'''_{x:o}, \quad r_{a:t} = r'''_{a:t}.$$

Die ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten $q^{i}_{[x]+t}$ erhält man durch Multiplikation der viermal ausgeglichenen Verhältniszahlen $r_{x:t}$ mit den entsprechenden ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten der Standardtafel.

Diese ausgeglichenen Werte sind im wesentlichen abhängig von der Wahl der Gewichte und der Standardtafel, sowie von der Reihenfolge der Ausgleichung.

Zunächst ist einmal einzusehen, daß man keine theoretischen Untersuchungen anstellen kann, die den Einfluß dieser willkürlichen Faktoren auf die Sterbenswahrscheinlichkeiten in allen Fällen feststellen.

Bei einer Aenderung der Gewichte ist lediglich festzuhalten, daß je größer man das Gewicht $\frac{1}{1+a+b}$ wählt, desto weniger werden sich am Schluß die ausgeglichenen von den unausgeglichenen Werten unterscheiden. Wählt man die Gewichte $\frac{a}{1+a+b}$ und $\frac{b}{1+a+b}$ größer, dann nähern sich die neuausgeglichenen Werte den Werten der Standardtafel.

Zu den beiden anderen Punkten ist zu bemerken, daß ihre Veränderung keinen wesentlichen Einfluß auf die Ausgleichung besitzt.

Wir werden im Abschnitt C Gelegenheit haben, an einem praktischen Beispiel auf diese Fragen näher zurückzukommen.

Nimmt man beispielsweise an: $a = 0.6$ und $b = 0.4$, dann erhalten wir folgendes Schema von Ausgleichungsformeln:

$$
\begin{aligned}
r'_{x:t} &= 0.5\,\bar{r}_{x:t} + 0.3\,r'_{x:t-1} + 0.2\,r'_{x+1:t} \\
r''_{x:t} &= 0.5\,r'_{x:t} + 0.3\,r''_{x:t+1} + 0.2\,r''_{x-1:t} \\
r'''_{x:t} &= 0.5\,r''_{x:t} + 0.3\,r'''_{x:t+1} + 0.2\,r'''_{x+1:t} \\
r_{x:t} &= 0.5\,r'''_{x:t} + 0.3\,r_{x:t-1} + 0.2\,r_{x-1:t}
\end{aligned}
\qquad (26)
$$

Zur Kennzeichnung dieser Ausgleichung, die durch die angegebene Konstantenwahl bestimmt ist, bezeichnet sie Wells eine $\left\{\begin{matrix} 3 & 5 \\ & 2 \end{matrix}\right\}$ Ausgleichung.

Die Reihenfolge der Ausgleichung geschieht, wenn wir uns die $r_{x:t}$ in der bekannten symmetrischen Form aufgezeichnet denken, folgendermaßen:

1. links unten, 2. rechts oben, 3. rechts unten, 4. links oben. Wells bezeichnet diese Reihenfolge in der Form $\begin{Bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Bmatrix}$.

Die Eckwerte werden mit den angegebenen Ausgleichungsformeln einmal, die übrigen Randwerte zweimal und alle anderen Werte viermal ausgeglichen.

Wir lösen nun die Gleichungen (22)—(25) nach $r_{x:t}$, $r'_{x:t}$, $r''_{x:t}$ und $r'''_{x:t}$ auf und erhalten das Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
\bar{r}_{x:t} &= (1+a+b)\, r'_{x:t} - a\, r'_{x:t-1} - b\, r'_{x+1:t} \\
r'_{x:t} &= (1+a+b)\, r''_{x:t} - a\, r''_{x:t+1} - b\, r''_{x-1:t} \\
r''_{x:t} &= (1+a+b)\, r'''_{x:t} - a\, r'''_{x:t+1} - b\, r'''_{x+1:t} \\
r'''_{x:t} &= (1+a+b)\, r_{x:t} - a\, r_{x:t-1} - b\, r_{x-1:t}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Dies können wir mit Hilfe der Symbole der Differenzenrechnung auch schreiben:

$$
\begin{aligned}
\bar{r}_{x:t} &= (1+a\triangle_x E_x^{-1} - b\triangle_t)\, r'_{x:t} \\
r'_{x:t} &= (1-a\triangle_x + b\triangle_t E_t^{-1})\, r''_{x:t} \\
r''_{x:t} &= (1-a\triangle_x - b\triangle_t)\, r'''_{x:t} \\
r'''_{x:t} &= (1+a\triangle_x E_x^{-1} + b\triangle_t E_t^{-1})\, r_{x:t},
\end{aligned}
\tag{27'}
$$

wobei die Symbole $\triangle_x$, $\triangle_t$, E_x^{-1}, E_t^{-1} folgendermaßen definiert sind:

$$
\begin{aligned}
\triangle_x r'_{x:t} &= r'_{x:t+1} - r'_{x:t} \\
\triangle_t r'_{x:t} &= r'_{x+1:t} - r'_{x:t} \\
E_x^{-1} r'_{x:t} &= r'_{x:t-1} \\
E_t^{-1} r_{x:t} &= r'_{x-1:t}
\end{aligned}
$$

Wenn wir (27′) ausrechnen und $\bar{r}_{x:t}$ als Funktion von $r_{x:t}$ berechnen, erhalten wir folgende Gleichung:

$$\bar{r}_{x:t} = \sum_{\nu,\mu} a_{\nu\mu}\, r_{x+\nu:t+\mu} \tag{28}$$

ν und μ nehmen die Werte $0, 1, -1, 2, -2$ an und

$$a_{\nu\mu} = 0 \begin{cases} \nu = \pm\mu = 2 \\ \nu = \pm\mu = -2 \end{cases}, \text{ alle übrigen Werte } a_{\nu\mu} \text{ sind } \neq 0.$$

$\bar{r}_{x:t}$ ist also eine lineare Funktion von einundzwanzig, in symmetrischer Form darstellbaren, ausgeglichenen Werten $r_{x:t}$.

Wir wollen nun der Vollständigkeit halber auch noch den Ausdruck wiedergeben, für den die Formeln (22)—(25) eine Minimumbedingung darstellen.

Wells gibt ihn in folgender Form an:

$$\begin{aligned}
&2(a^2+a)\sum_{x,t}(\triangle_x r_{x:t})^2 + 2(b^2+b)\sum_{x,t}(\triangle_t r_{x:t})^2 \\
&+ (a^2+a)^2\sum_{x,t}(\triangle_x^2 r_{x:t})^2 + (b^2+b)^2\sum_{x,t}(\triangle_t^2 r_{x:t})^2 \\
&+ a\,b\sum_{x,t}(\triangle_x\triangle_t r_{x:t})^2 + a\,b\,(a^2+a)\sum_{x,t}(\triangle_x^2\triangle_t r_{x:t})^2 \\
&+ a\,b\,(b^2+b)\sum_{x,t}(\triangle_x\triangle_t^2 r_{x:t})^2 \\
&+ a^2\,b^2\sum_{x,t}\left[(\triangle_x^2 - \triangle_t^2 E_t^{-1})r_{x:t}\right]\left[(\triangle_x^2 - \triangle_t^2 E_t^{-1} - 4)r_{x:t}\right] \\
&+ a^2\,b^2\sum_{x,t}\left[(\triangle_x^2 E_x^{-1} - \triangle_t^2)\,r_{x:t}\right]\left[(\triangle_x^2 E_x^{-1} - \triangle_t^2 + 4)\,r_{x:t}\right] \\
&+ \sum_{x,t}(r_{x:t} - \bar{r}_{x:t})^2.
\end{aligned} \tag{29}$$

Man erhält diesen Ausdruck mit Hilfe der Gleichung (30), die eine Umformung der Gleichung (27′) ist und folgende Gestalt hat:

$$\bar{r}_{x:n} = \Big[1 - 2(a^2+a)\,\delta_x^2 - 2(b^2+b)\,\delta_t^2 + (a^2+a)^2\,\delta_x^4$$

(30) $$+ (b^2+b)\,\delta_t^4 + a\,b\,\delta_x^2\,\delta_t^2 - a\,b\,(a^2+a)\,\delta_x^4\,\delta_t^2 - a\,b\,(b^2+b)\,\delta_x^2\,\delta_t^4$$

$$- a^2\,b^2\,\delta_x^2\,\delta_t^2\,(E_x^{-1} + E_t^{-1} + E_x + E_t)\Big]\,r_{x:t}.$$

Eine Anwendung der Ausgleichungsmethode von E. H. Wells zeigen wir an einem Beispiel im Abschnitt C. Wir haben dort auch Gelegenheit Vor- und Nachteile dieser Ausgleichungsmethode zu diskutieren und Ergänzungen anzubringen.

C. Die Ausgleichung der S. I. S. 1930—1937.

Unser Beobachtungsmaterial, das uns die Berechnung der Invalidensterbenswahrscheinlichkeiten ermöglichte, umfaßt 116 126 invalide Rentenbezüger der E. V. K. und der P. H. K., die im Zeitraum 1. 1. 1930—31. 12. 1937 ein Jahr unter Beobachtung gestanden sind. Wir haben uns auf die Beobachtungen von acht Jahren gestützt, um einerseits ein genügend großes statistisches Material zu besitzen und anderseits zeitlich zu weit zurückliegende Erfahrungen unberücksichtigt zu lassen.

Die aus diesem Material hergeleitete schweizerische Invaliden-Selektions-Sterbetafel bezeichnen wir mit S. I. S. 1930—1937.

Zur Berechnung der rohen Sterbenswahrscheinlichkeiten aus dem Beobachtungsmaterial sind wir so vorgegangen, wie wir dies im 1. Kapitel angegeben haben. Wir haben dann Altersgruppen zu je fünf Jahren gebildet, um das Beobachtungsmaterial in den einzelnen Altern nicht zu klein werden zu lassen. Aus demselben Grunde haben wir die Beobachtungen nicht nach dem Geschlecht getrennt. Der Anteil des weiblichen Geschlechtes beträgt übrigens nur ca. 10 % vom Gesamtmaterial.

Tabelle IV bildet die Grundlage unserer weiteren Untersuchungen und umfaßt 105 799 ein Jahr unter Beobachtung gestandene Invalide. Von diesen sind 4164 innerhalb eines Jahres

gestorben. Invalide und Tote, deren Alter im Zeitpunkt der Invalidierung kleiner als 31 war, wurden in dieser Tabelle nicht berücksichtigt, da die Zahl ihrer Beobachtungsjahre so klein war, daß man keine Anhaltspunkte über die Sterbenswahrscheinlichkeiten erhalten konnte. Invalide über 70 Jahre sind ebenfalls weggelassen worden, da sie nur zur Bestimmung der Schlußkurve in Betracht kamen.

Wenn wir zur Ausgleichung unserer rohen Invalidensterbenswahrscheinlichkeiten die Methode von E. H. Wells benutzen, haben wir uns vorerst mit folgenden drei Punkten zu befassen:

1. Wahl der Standardtafel.
2. Wahl der Gewichte.
3. Wahl der Reihenfolge in der Ausgleichung.

1. Wir haben für unsere Ausgleichung als Standardtafel das Material „Schweden Männer 1921—1925" verwendet, weil es in vielen Beziehungen Aehnlichkeit mit unserem Material aufweist und zeitlich nicht allzuweit zurückliegt. Von den unternommenen Versuchen mit verschiedenen Standardtafeln haben wir mit dieser das beste Resultat erzielt.

2. Durch unsere Ausgleichung wollen wir unsere beobachteten Werte, die sich aus den Werten von 5-jährigen Altersgruppen zusammensetzen, nicht allzusehr abändern lassen. Wir müssen deshalb bei einer Ausgleichung mit den Konstanten $\begin{Bmatrix} a_2 & a_1 \\ & a_3 \end{Bmatrix}$ das Gewicht a_1 relativ groß wählen.

Unserer Ausgleichung haben wir die Gewichte $\begin{Bmatrix} 1 & 8 \\ & 1 \end{Bmatrix}$ zugrunde gelegt.

3. Die Wahl der Reihenfolge in der Ausgleichung ist derjenige Punkt, der den geringsten Einfluß auf die Beschaffenheit der ausgeglichenen Werte hat. Die ausgeglichenen Werte unterscheiden sich bei einer Aenderung der Reihenfolge in unserem Falle nie mehr als um 1,5 % voneinander. Wir haben die Reihenfolge $\begin{Bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{Bmatrix}$ gewählt, weil dadurch die Wahrscheinlichkeitswerte, die sich auf das relativ größte Beobachtungsmaterial stützen, am wenigsten abgeändert werden.

Um den Einfluß der ersten beiden angegebenen Punkte an unserem Beispiel zu zeigen, haben wir drei Ausgleichungen durchgeführt und die Verhältniszahlen der erwarteten zu den wirklich eingetretenen Toten in nachfolgenden Tabellen berechnet.

Standardtafel, Konstanten und die Reihenfolge der Ausgleichung sind folgendermaßen gewählt worden:

	Standardtafel	Konstanten	Reihenfolge
(1)	„Schweden Männer 1921—25“	$\begin{Bmatrix} 1 & 8 \\ & 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{Bmatrix}$
(2)	„Schweden Frauen 1921—25“	$\begin{Bmatrix} 1 & 8 \\ & 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{Bmatrix}$
(3)	„Schweden Männer 1921—25“	$\begin{Bmatrix} 4 & 5 \\ & 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{Bmatrix}$

Altersgruppen	Zentralalter in Jahren	(1) %	(2) %	(3) %
31 — 35	33	98.94	100.00	98.95
36 — 40	38	104.72	105.00	107.22
41 — 45	43	98.97	99.59	98.47
46 — 50	48	94.83	94.87	91.31
51 — 55	53	100.98	100.51	99.21
56 — 60	58	102.24	101.26	100.71
61 — 65	63	97.53	96.58	95.81
66 — 70	68	100.01	101.37	97.70
Ganze Tafel		99.63	99.39	97.77

Zurückgelegte Invaliditätsdauer in Jahren	(1) %	(2) %	(3) %
0	97.70	98.46	109.58
1	107.54	106.01	120.76
2	100.47	99.57	108.27
3	103.77	102.87	107.42
4	99.92	99.64	95.73
5 und mehr	98.04	98.44	91.60
Ganze Tafel	99.63	99.39	97.77

Zur Ausgleichung der rohen Beobachtungswerte konstruieren wir zunächst eine Tafel der $\bar{r}_{x:t}$ mit Hilfe der Standardtafel „Schweden Männer 1921—1925".

$\bar{r}_{x:t}$

Altersgruppen	Zentralalter	x \ t	0	1	2	3	4	5 und mehr
31—35	33	1	0.720	0.484	0.449	0.626	0.399	0.283
36—40	38	2	.478	.482	.444	.298	.386	.386
41—45	43	3	.663	.286	.429	.698	.548	.585
46—50	48	4	.587	.791	.624	.542	.407	.705
51—55	53	5	.518	.441	.434	.552	.780	.778
56—60	58	6	.484	.339	.544	.550	.767	.841
61—65	63	7	.461	.566	.741	.768	.767	1.028
66—60	68	8	.674	.963	.732	.613	1.300	1.046

Folgendes Schema von Ausgleichungsformeln soll die Ausgleichung bestimmen:

$$
\begin{aligned}
&r'_{x:t} = 0.8\,\bar{r}_{x:t} + 0.1\,r'_{x:t+1} + 0.1\,r'_{x+1:t} \qquad r'_{x:5} = \bar{r}_{x:5} \quad r'_{8:t} = \bar{r}_{8:t} \\
&r''_{x:t} = 0.8\,r'_{x:t} + 0.1\,r''_{x:t-1} + 0.1\,r''_{x-1:t} \qquad r''_{x:0} = r'_{x:0} \quad r''_{1:t} = r'_{1:t} \\
&r'''_{x:t} = 0.8\,r''_{x:t} + 0.1\,r'''_{x:t-1} + 0.1\,r'''_{x+1:t} \qquad r'''_{x:0} = r''_{x:0} \quad r'''_{8:t} = r''_{8:t} \\
&r_{x:t} = 0.8\,r'''_{x:t} + 0.1\,r_{x:t+1} + 0.1\,r_{x-1:t} \qquad r_{x:5} = r'''_{x:5} \quad r_{1:t} = r'''_{1:t}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Dies entspricht einer $\left\{\begin{matrix} 1 & 8 \\ & 1 \end{matrix}\right\}$ Ausgleichung in der Reihenfolge $\left\{\begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right\}$.

Wir erhalten zunächst die einmal ausgeglichenen Werte

$r'_{x:t}$

x \ t	0	1	2	3	4	5 und mehr
1	0.675	0.480	0.460	0.574	0.388	.283
2	.491	.464	.437	.345	.402	.386
3	.625	.350	.470	.667	.544	.585
4	.594	.737	.600	.541	.474	.705
5	.506	.438	.462	.599	.780	.778
6	.476	.390	.569	.594	.782	.841
7	.500	.623	.742	.760	.846	1.028
8	.674	.963	.732	.613	1.300	1.046

dann

$r''_{x:t}$

x \ t	0	1	2	3	4	5 und mehr
1	0.675	0.480	.460	0.574	0.388	0.283
2	.491	.468	.442	.378	.398	.377
3	.625	.389	.459	.617	.537	.559
4	.594	.686	.595	.554	.488	.669
5	.506	.470	.476	.582	.731	.762
6	.476	.407	.544	.588	.758	.825
7	.500	.589	.707	.738	.826	.988
8	.674	.897	.746	.639	1.187	1.054

und

$r'''_{x:t}$

x \ t	0	1	2	3	4	5 und mehr
1	0.675	0.498	0.463	0.546	0.406	0.307
2	.491	.467	.447	.407	.413	.400
3	.625	.439	.470	.597	.541	.568
4	.594	.655	.590	.560	.518	.664
5	.506	.470	.483	.574	.717	.765
6	.476	.434	.549	.598	.751	.833
7	.500	.611	.701	.724	.852	.981
8	.674	.897	.746	.639	1.187	1.054

$r_{x:t}$

x \ t	0	1	2	3	4	5 und mehr
1	0.675	.498	.463	0 546	0.406	.307
2	.507	.468	.446	.421	.411	.400
3	.595	.446	.478	.573	.531	.568
4	.597	.626	.576	.559	.534	.664
5	.513	.489	.503	.586	.704	.765
6	.477	.451	.551	.613	.755	.833
7	.508	.603	.689	.726	.855	.981
8	.675	.852	.736	.698	1.141	1.054

Durch Multiplikation der $r_{x:t}$ mit den Werten der Standardtafel ${}^{1}q^{i}_{[x+t]}$ erhalten wir unsere ausgeglichenen Werte

$q^{i}_{[x]+t}$

Altersgruppen	Zentralalter [x]	$q^{i}_{[x]}$ ‰	$q^{i}_{[x]+1}$ ‰	$q^{i}_{[x]+2}$ ‰	$q^{i}_{[x]+3}$ ‰	$q^{i}_{[x]+4}$ ‰	${}^{(5)}q^{i}_{x+5}$ ‰
31—35	33	98.0	53.2	35.6	30.1	16.7	10.5
(32) 36—40	38	66.8	45.6	31.7	21.9	16.4	13.7
41—45	43	70.4	39.5	31.5	28.4	21.0	19.8
46—50	48	62.6	50.0	53.1	26.7	21.3	24.1
51—55	53	46.8	34.9	28.5	27.5	29.1	30.0
56—60	58	37.2	28.6	29.5	29.0	33.4	36.2
61—65	63	32.7	33.8	35.1	35.4	41.4	48.4
66—70	68	35.4	44.0	38.7	38.3	65.7	64.3

Die Kurve, die aus den Werten $q^{i}_{[x]+t}$ gebildet wird, wobei x festbleibt und t von 0—5 läuft, bezeichnen wir als Sterbekurve.

Die Schlußkurve setzt sich aus den Werten ${}^{(5)}q^{i}_{x+5}$ zusammen.

Wenn wir die ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten $q^{i}_{[x]+t}$ aufzeichnen, so läßt sich namentlich bei den Sterbekurven nicht überall ein glatter Verlauf feststellen. Es ist auch ohne weiteres verständlich, daß wir nach der Ausgleichungsmethode

von E. H. Wells nicht erwarten können, daß die Sterbekurven bei der Einmündung in die Schlußkurve mit dieser eine gemeinsame Tangente besitzen.

Um diesen Nachteil zu beseitigen, gehen wir folgendermaßen vor:

Die Werte q^i_x und die Werte der Schlußkurve ${}^{(5)}q^i_{x+5}$ entnehmen wir unserer Tafel (32) und bezeichnen diese beiden Kurven mit $F(\xi)$ bezw. $G(\xi)$, wobei zwischen x und ξ die Gleichung

$$x = 5\,\xi + 48$$

besteht.

$F(\xi)$ und $G(\xi)$ setzen wir dann aus je 5 Kurvenstücken $F_\nu(\xi)$ bezw. $G_\nu(\xi)$ $(\nu = 1.2 \ldots 5)$ so zusammen, daß die Bedingungen

$$F'_{\nu-1}(\xi_\lambda) = F'_\nu(\xi_\lambda), \qquad G'_{\nu-1}(\xi_\lambda) = G'_\nu(\xi_\lambda)$$

erfüllt sind.

Wenn wir darauf achten, nicht allzu große Schwankungen der Kurven zuzulassen, erhalten wir für $F_\nu(\xi)$ und $G_\nu(\xi)$ folgende analytische Ausdrücke:

(33)
$$\begin{aligned}
F_1(\xi) &= -69.6\,\xi - 110.8 && -5.6 \leq \xi \leq -3\\
F_2(\xi) &= -10.5\,\xi^3 - 45.6\,\xi^2 - 59.7\,\xi + 45.8 && -3 \leq \xi < -1\\
F_3(\xi) &= 1.9\,\xi^3 - 4\,\xi^2 - 13.7\,\xi + 62.6 && -1 < \xi < 1\\
F_4(\xi) &= -1.925\,\xi^3 + 14.1\,\xi^2 - 38.425\,\xi + 73.05 && 1 \leq \xi \leq 3\\
F_5(\xi) &= 8.5\,\xi^2 - 56.8\,\xi + 126.6 && 3 \leq \xi \leq 4
\end{aligned}$$

(34)
$$\begin{aligned}
G_1(\xi) &= -5.8\,\xi - 2.4 && -4.6 \leq \xi \leq -3\\
G_2(\xi) &= 1.275\,\xi^3 + 11.5\,\xi^2 + 28.775\,\xi + 32.25 && -3 < \xi \leq -1\\
G_3(\xi) &= 1.3\,\xi^3 - 0.9\,\xi^2 + 3.9\,\xi + 19.8 && -1 \leq \xi \leq 1\\
G_4(\xi) &= 6\,\xi + 18.1 && 1 \leq \xi \leq 3\\
G_5(\xi) &= -2.175\,\xi^3 + 27.95\,\xi^2 - 102.975\,\xi + 152.3 && 3 < \xi \leq 5
\end{aligned}$$

Die Schlußkurve wurde für $\xi > 5$ graphisch ausgeglichen.

Um zu erreichen, daß die Sterbekurven tangential in die Schlußkurve einmünden, legen wir durch die Punkte $q^i_{[x_k]}$ auf $F(x)$ und ${}^{(5)}q^i_{x_k+5}$ auf $G(x)$ quadratische Parabeln $f_k(x_k)$ so, daß die Beziehungen

$$f_k'(x_k + 5) = G'(x_k + 5) \tag{35}$$

gelten.

Durch diese Ausgleichung haben wir einen glatten Verlauf der Sterbekurven erzielt, gleichzeitig ist damit aber auch das Problem der Interpolation der zu den einzelnen Altersjahren gehörenden Wahrscheinlichkeitswerte auf einfache Weise gelöst worden.

Tabelle V und die graphische Darstellung II zeigen den Verlauf, der nach diesen Formeln ausgeglichenen Invaliden-Selektions-Sterbenswahrscheinlichkeiten der E. V. K. und P. H. K. Wir sehen, daß auch bei unserer Tafel der Einfluß der Invaliditätsdauer auf die Sterblichkeit der Invaliden namentlich in den jüngeren Altern sehr groß ist. Die Werte $q^i_{[x]+t}$ sind bis zum Alter 61 überall über den entsprechenden aus der Schlußtafel. Nach diesem Alter macht sich sonderbarerweise das Gegenteil bemerkbar. Betrachten wir aber unsere Verhältnisse genauer, dann finden wir bald eine Erklärung dafür.

Dem Gutachten der Herren Schaertlin, de Cérenville und Dumas [13] entnehmen wir, daß bei der P. H. K. in den Jahren 1924—1935 von 3108 55—59-jährigen Pensionierten 2682 vom Oberbahnarzt invalid erklärt wurden, bei den 2550 60—64-jährigen Pensionierten beträgt diese Zahl sogar nur 1473. Es befinden sich also in diesen Altern immer eine gewisse Anzahl „Aktiver", sog. „Zwangspensionierte", unter den wirklich „Invaliden". Es ist nun ohne weiteres einzusehen, daß mit zunehmender Pensionierungsdauer dieses Verhältnis der „Aktiven" zu den wirklich „Invaliden" abnimmt. Da die Sterblichkeit der Invaliden größer ist, als die der Aktiven, wird $q^i_{[x-t]+t}$ mit wachsendem t zunehmen.

III. Kapitel.

Beziehungen zwischen Aggregat- und Selektions-Sterbetafeln

In den folgenden Ausführungen wollen wir annehmen, daß die mit Hilfe einer Invaliden-Selektions-Sterbetafel berechneten Prämien und Deckungskapitalien der Aktiven und Invaliden einer Invalidenkasse richtige Resultate ergeben. Wenn wir uns nun über die Größe des Fehlers Rechenschaft geben wollen, den wir begehen, wenn wir den Berechnungen eine Aggregattafel zugrunde legen, ist es notwendig, die Beziehungen, die zwischen den Aggregat- und Selektions-Sterbetafeln bestehen, näher zu untersuchen.

Wir bezeichnen mit

$L^{ii}_{[x-t]+t}$ die Anzahl der x jährigen Invaliden der Kasse, die vor t Jahren invalid geworden sind,

${}^{(t_o)}L^{ii}_{x}$ die Anzahl der x jährigen Invaliden, die mindestens t_o Jahre invalid sind.

Alle x jährigen Invaliden L^{ii}_{x} der Kasse erhalten wir nach der Gleichung:

$$L^{ii}_{x} = \sum_{t=o}^{t_o-1} L^{ii}_{[x-t]+t} + {}^{(t_o)}L^{ii}_{x}.$$

Zwischen dem Aggregatwert q^{i}_{x} und den Selektionswerten $q^{i}_{[x-t]+t}$ besteht die bekannte Beziehung:

$$q^{i}_{x} = \frac{\sum_{t=o}^{t_o-1} L^{ii}_{[x-t]+t}\, q^{i}_{[x-t]+t} + {}^{(t_o)}L^{ii}_{x}\, {}^{(t_o)}q^{i}_{x}}{L^{ii}_{x}}. \tag{36}$$

Ist $q^{i}_{[x-t]+t}$ mit wachsendem t eine monoton abnehmende Funktion, dann besteht die Ungleichung:

$$q^i_{[x]} > q^i_x > {}^{(t_0)}q^i_x,$$

q^i_x ist also das gewogene arithmetische Mittel aus den Werten $q^i_{[x-t]+t}$ deren Gewichte $\frac{L^{ii}_{[x-t]+t}}{L^{ii}_x}$ sind.

Die Unvollkommenheit des Aggregatwertes q^i_x den Verlauf der Invalidensterblichkeit richtig wiederzugeben, zeigt sich am besten dadurch, daß q^i_x an eine zufällige Verteilung der $L^{ii}_{[x-t]+t}$ gebunden ist, d. h. trotzdem z. B. die Werte $q^i_{[x-t]+t}$ festbleiben, wird q^i_x je nach der Veränderung der Verteilung der Invaliden in bezug auf die zurückgelegte Invaliditätsdauer, zwischen den Werten $q^i_{[x]}$ und ${}^{(t_0)}q^i_x$ schwanken.

Wollen wir die Verteilung der Aktiven bezw. Invaliden als konstant ansehen, so müssen wir gewisse Voraussetzungen machen.

Wir nehmen an, daß die Verteilungsstruktur der Aktiven in unserer Pensionskasse dieselbe sei wie die der Schärtlinschen Gesamtheit $\sum_x l^{aa}_x$.

Bezeichnen wir, in Uebereinstimmung mit der Bezeichnungsweise des eidg. Versicherungsamtes in den Rechnungsgrundlagen für Gruppenversicherungen Bern 1931, mit

$i^{(e)}_x$ die abhängige, d. h. erfahrungsmäßige Invalidierungswahrscheinlichkeit,

${}^{(e)}q^{aa}_x$ die erfahrungsmäßige Sterbenswahrscheinlichkeit der Aktiven,

so ist, wenn sich $i^{(e)}_x$ und ${}^{(e)}q^{aa}_x$ in der Beobachtungszeit nicht ändern, wegen der Beziehung

$$l^{aa}_{x+1} = l^{aa}_x \,(1 - i^{(e)}_x - {}^{(e)}q^{aa}_x), \tag{37}$$

die Verteilungsstruktur $\sum_x l^{aa}_x$ konstant. Wenn wir mit A die Gesamtheit der Aktiven der Kasse bezeichnen, und mit c eine beliebige positive Konstante, so ist damit auch

$$A = c \sum_x l^{aa}_x \tag{38}$$

konstant.

Zur Bestimmung der Invalidengesamtheit bedienen wir uns der nachfolgenden Formeln.

Zunächst erhalten wir, wenn wir mit ν_x die Invalidierungsintensität bezeichnen, die Neuinvaliden durch die Beziehungen:

(39)
$$
\begin{aligned}
{}^{ii}\tilde{l}_{[x]} &= \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} l_x^{aa}\, \nu_x\, dx, \\
&\vdots \\
{}^{ii}\tilde{l}_{[x+t-1]} &= \int_{x+t-\frac{3}{2}}^{x+t-\frac{1}{2}} l_x^{aa}\, \nu_x\, dx, \\
{}^{ii}\tilde{l}_{[x+t]} &= \int_{x+t-\frac{1}{2}}^{x+t+\frac{1}{2}} l_x^{aa}\, \nu_x\, dx.
\end{aligned}
$$

Wenn wir annehmen, die Invaliden würden in der Mitte des Jahres entstehen, so erhalten wir durch numerische Auswertung dieser Integrale näherungsweise:

(39′)
$$
{}^{ii}l_{[x+t]} = {}^{aa}l_{x+t-\frac{1}{2}}\; {}^{i(e)}i_{x+t-\frac{1}{2}}.
$$

Alle übrigen Invaliden bekommen wir durch die Rekursionsformel:

(40)
$$
{}^{ii}l_{[x]+t} = {}^{ii}l_{[x]+t-1}\; {}^{i}p_{[x]+t-1}.
$$

Die Invaliden des Alters y, die wir zum Unterschied von den von Schärtlin berechneten, mit ${}^{s}{}^{ii}l_y$ bezeichnen wollen, setzen sich dann folgendermaßen zusammen:

$$
{}^{s}{}^{ii}l_y = \sum_{x,\,t} {}^{ii}l_{[x]+t}.
$$

Es wird über x und t summiert, die folgende Bedingungen erfüllen müssen:

$$
x+t=y, \qquad a \leq x \leq \omega_1, \qquad o \leq t \leq \omega_2;
$$

ω_1 ist das höchste Alter bei dem noch neue Invalide entstehen und ω_2 die höchste Invalidierungsdauer.

Die Gesamtzahl der Invaliden J soll in unserer Invalidenkasse

$$J = c \sum_{y} {}^{s}l_{x}^{ii} \tag{41}$$

betragen.

Auf Grund dieser Angaben können wir den Beharrungszustand der Kasse definieren.

Werden die Wahrscheinlichkeitswerte $i_x^{(e)}$, ${}^{(e)}q_x^{aa}$ und $p^i_{[x]+t}$ für alle x bezw. x und t als von der Beobachtungszeit unverändert angesehen, so befindet sich die Kasse im Beharrungszustand, wenn sich ihre Mitglieder auf Grund der Beziehung

$$A + J = c\left(\sum_{x} l_x^{aa} + \sum_{y} {}^{s}l_y^{ii}\right) \tag{42}$$

zusammensetzen.

Die Aggregat-Sterbenswahrscheinlichkeit ${}^{B}q_x^i$ eines Invaliden der Kasse, die sich im Beharrungszustand befindet, ist dann:

$${}^{B}q_x^i = \frac{\sum_{t=0}^{\omega_2} l^{ii}_{[x-t]+t}\, q^i_{[x-t]+t}}{{}^{s}l_x^{ii}}. \tag{43}$$

Die auf diese Weise berechneten Aggregatwerte ${}^{B}q_x^i$ geben uns ein besseres Abbild der Invalidensterblichkeit als die Werte q_x^i, weil die Besetzungsverhältnisse $\frac{l^{ii}_{[x-t]+t}}{{}^{s}l_x^{ii}}$ konstant bleiben und sich deshalb ${}^{B}q_x^i$ nicht ändert, wenn die Selektionswerte $q^i_{[x-t]+t}$ als von der Beobachtungszeit unabhängig angesehen werden.

Wir haben in Tabelle X (1) eine aus dem Material der E. V. K. und P. H. K. nach diesen Grundsätzen hergeleitete Aggregattafel angegeben.

Das Problem, die in der Handhabung komplizierten Selektions-Sterbetafeln durch einfachere Tafeln, sog. abgeleitete oder verallgemeinerte Aggregattafeln zu ersetzen, ist eingehend auf

dem 10. internationalen Kongreß für Versicherungswissenschaft in Rom 1934 behandelt worden.

St. V a j d a [14] leitet auf folgende Weise eine verallgemeinerte Aggregattafel ab: er stellt die Bedingung, daß für eine bestimmte Versicherungskombination sowohl bei Zugrundelegung der Selektionstafel als auch der Aggregattafel, der Barwert der Gesamtprämienzahlungen einer Eintrittsgeneration derselbe sein soll. Diese Bedingung nennt der Verfasser Aequivalenzbedingung. Es ist klar, daß diese Bedingung je nach der Art der Versicherungskombination auf verschiedene Aggregattafeln führen wird.

Beschränkt man sich auf die Untersuchung der lebenslänglichen Todesfallversicherung gegen Einmalprämie, dann lautet die Aequivalenzbedingung für diesen Fall:

$$\sum_x L_x A_{[x]} = \sum_x L_x A_x, \tag{44}$$

wobei $A_{[x]}$ und A_x die Einmalprämien einer lebenslänglichen Todesfallversicherung nach der Selekt- bezw. Aggregattafel und L_x die Anzahl der in einem Jahre eintretenden Personen des Alters x bedeuten.

Gleichung (44) ausführlicher geschrieben lautet:

$$\sum_x L_x \sum_{y=x}^{\infty} p_{[x]} p_{[x]+1} \cdots p_{[x]+y-x-1} q_{[x]+y-x} v^{y-x+1} = \tag{44'}$$

$$= \sum_x L_x \sum_{y=x}^{\infty} p_x p_{x+1} \cdots p_{y-1} q_y v^{y-x+1},$$

wenn mit $q_{[x]+y-x}$ die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit eines y-jährigen Versicherten bezeichnet wird, der im Alter x untersucht worden ist. V a j d a nimmt an, die Aequivalenzbedingung (44) sei für jedes Alter erfüllt, und es hange q_y nur von solchen Werten $q_{[x]+\bar{y}-x}$ ab, für die $\bar{y}$ nicht größer als y ist. Dann beweist er aus der Annahme (44) durch vollständige Induktion die Beziehung:

$$(45) \qquad q_y = \frac{\sum_{x=x_0}^{y} L_x \frac{l_{[x]+y-x}}{l_{[x]}} q_{[x]+y-x} \, v^{y-x+1}}{\sum_{x=x_0}^{y} L_x \frac{l_{[x]+y-x}}{l_{[x]}} v^{y-x+1}}.$$

v^{y-x+1} hat in dieser Formel die Bedeutung eines Gewichtes, das mit wachsendem x größer wird. x_0 ist das jüngste in der Eintrittsgeneration vorhandene Alter.

Wir wollen für unseren Fall der Invalidenversicherung eine zu (45) analoge Beziehung herleiten und gehen deshalb von folgender Aequivalenzbedingung aus:

$$(46) \qquad \sum_{x=x_0}^{\infty} L_x^{ii} \, a_x^i = \sum_{x=x_0}^{\infty} L_x^{ii} \, a_{[x]}^i$$

oder auch

$$(46') \qquad \sum_{x=x_0}^{\omega_1} L_x^{ii} \sum_{y=x}^{\infty} p_x^i \, p_{x+1}^i \cdots p_y^i \, v^{y-x+1} =$$

$$= \sum_{x=x_0}^{\omega_1} L_x^{ii} \sum_{y=x}^{\infty} p_{[x]}^i p_{[x]+1}^i \cdots p_{[x]+y-x}^i \, v^{y-x+1}.$$

Wir nehmen nun auch hier an, die Ueberlebenswahrscheinlichkeit p_y^i hange nur von solchen Werten $p_{[x]+\bar{y}-x}^i$ ab, für die $\bar{y}$ nicht größer als y ist. In Worten ausgedrückt: die Aggregat-Ueberlebenswahrscheinlichkeit des y-jährigen Invaliden ist eine Funktion der Ueberlebenswahrscheinlichkeiten nach der Selekttafel von solchen Invaliden, deren Alter nicht höher als y ist.

Es muß also für das unterste Alter x_0 die Gleichung gelten:

$$(47) \qquad L_{x_0}^{ii} \, p_{x_0}^i \, v = L_{x_0}^{ii} \, p_{[x_0]}^i \, v = Z_0.$$

Wir erhalten daraus sofort:

$$(47') \qquad p_{x_0}^i = p_{[x_0]}^i$$

Gehen wir bis zum Alter $x_0 + 1$, dann haben wir die Beziehung:

$$L^{ii}_{x_0} p^i_{x_0} v + p^i_{x_0+1} \left[L^{ii}_{x_0} p^i_{x_0} v^2 + L^{ii}_{x_0+1} v \right] =$$

(48)

$$= L^{ii}_{x_0} p^i_{[x_0]} v + L^{ii}_{x_0} p^i_{[x_0]} p^i_{[x_0]+1} v^2 + L^{ii}_{x_0+1} p^i_{[x_0+1]} v$$

und daraus unter Berücksichtigung von (47'):

$$p^i_{x_0+1} = \frac{L^{ii}_{x_0} p^i_{[x_0]} p^i_{[x_0]+1} v^2 + L^{ii}_{x_0+1} p^i_{[x_0+1]} v}{L^{ii}_{x_0} p^i_{x_0} v^2 + L^{ii}_{x_0+1} v} = \frac{Z_1}{N_1}. \tag{48'}$$

Für den nächsten Schritt bis zum Alter x_0+2 erhalten wir:

$$p^i_{x_0+2} p^i_{x_0+1} N_1 v + L^{ii}_{x_0+2} p^i_{x_0+2} v =$$

$$= L^{ii}_{x_0} p^i_{[x_0]} p^i_{[x_0]+1} p^i_{[x_0]+2} v^3 + L^{ii}_{x_0+1} p^i_{[x_0+1]} p^i_{[x_0+1]+1} v^2 + \tag{49}$$

$$+ L^{ii}_{x_0+2} p^i_{[x_0+2]} v = Z_2$$

und daraus wegen (48'):

$$p^i_{x_0+2} v (Z_1 + L^{ii}_{x_0+2}) = Z_2. \tag{49'}$$

Beim nächsten Schritt erhalten wir:

$$p^i_{x_0+3} v (Z_2 + L^{ii}_{x_0+3}) = Z_3. \tag{50}$$

Allgemein können wir die Formel aufstellen:

$$p^i_{x_0+t} v (Z_{t-1} + L^{ii}_{x_0+t}) = Z_t. \tag{51}$$

Wir setzen der Einfachheit halber:

$$p^i_{[x]} p^i_{[x]+1} \cdots\cdots p^i_{[x]+t-1} = \frac{l^i_{[x]+t}}{l^i_{[x]}}.$$

Für Z_t erhalten wir dann, wenn wir uns die Reihe $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ fortgesetzt denken:

$$Z_t = \sum_{x=x_0}^{x_0+t} L^{ii}_x \frac{l^i_{[x]+x_0+t-x+1}}{l^i_{[x]}} v^{x_0+t-x+1} \tag{52}$$

und

$$Z_{t-1} + L^{ii}_{x_0+t} = \sum_{x=x_0}^{x_0+t-1} L^{ii}_x \frac{l^i_{[x]+x_0+t-x}}{l^i_{[x]}} v^{x_0+t-x} + L^{ii}_{x_0+t} =$$

$$= \sum_{x=x_0}^{x_0+t} L^{ii}_x \frac{l^i_{[x]+x_0+t-x}}{l^i_{[x]}} v^{x_0+t-x}.$$

Setzen wir noch für $x + t = y$ ein, dann erhalten wir für unseren Fall eine ähnliche Beziehung, wie sie V a j d a in Formel (45) gefunden hat:

(53)
$$p_y = \frac{\sum_{x=x_0}^{y} L^{ii}_x \frac{l^i_{[x]+y-x+1}}{l^i_{[x]}} v^{y-x+1}}{\sum_{x=x_0}^{y} L^{ii}_x \frac{l^i_{[x]+y-x}}{l^i_{[x]}} v^{y-x+1}}.$$

Wir wollen uns nun die Frage stellen, ob die Beziehung (53) auch dann gelte, wenn wir die Annahme treffen, daß die gesamte Einmaleinlage der Aktiven nach beiden Tafeln denselben Wert ergeben soll.

Wir gehen dabei von folgender Aequivalenzbedingung aus:

(54)
$$\sum_{x=x_0}^{\infty} L^{aa}_x \, a^{ai}_x = \sum_{x=x_0}^{\infty} L^{aa}_x \, {}^s a^{ai}_x,$$

${}^s a^{ai}$ bedeutet den Barwert des Anspruchs eines x-jährigen Aktiven auf die Invalidenrente „I" bei Zugrundelegung der Invaliden-Selektions-Sterbetafel.

Die erste Rente wird unmittelbar nach Eintreten der Invalidität ausbezahlt. Die Invaliditätsfälle verteilen sich gleichmäßig über das ganze Jahr.

Nun versuchen wir (54) auf die Form der Gleichung (46) zu bringen.

Es ist näherungsweise:

$$\sum_{x=x_0}^{\infty} L^{aa}_x \, a^{ai}_x = \sum_{x=x_0}^{\infty} \frac{L^{aa}_x}{l^{aa}_x} \sum_{z=x}^{\infty} v^{z-x+\frac{1}{2}} \, l^{aa}_z \, i^{(e)}_z \, a^i_{z+\frac{1}{2}} = \sum_{x=x_0}^{\infty} {}^* L^{ii}_{x+\frac{1}{2}} \, a^i_{x+\frac{1}{2}}$$

(55) und

$$\sum_{x=x_0}^{\infty} L_x^{aa}\ {}^s\mathrm{a}_x^{ai} = \sum_{x=x_0}^{\infty} \frac{L_x^{aa}}{l_x^{aa}} \sum_{z=x}^{\infty} v^{z-x+\frac{1}{2}}\ l_z^{aa}\ i_z^{(e)}\ \mathrm{a}_{[z+\frac{1}{2}]}^{i} = \sum_{x=x_0}^{\infty} {}^*L_{x+\frac{1}{2}}^{ii}\ \mathrm{a}_{[x+\frac{1}{2}]}^{i}.$$

Wir bestimmen ${}^*L_{x+\frac{1}{2}}^{ii}$ aus der obigen Gleichung und erhalten:

$$(56) \qquad {}^*L_{x+\frac{1}{2}}^{ii} = l_x^{aa}\ i_x^{(e)} \sum_{z=x_0}^{x} v^{x-z+\frac{1}{2}}\ \frac{L_z^{aa}}{l_z^{aa}}.$$

Die Bedingung dafür, daß die Aequivalenzgleichung (54) erfüllt ist, ist analog der Beziehung (53), nämlich:

$$(57) \qquad p_y = \frac{\sum_{x=x_0}^{y} l_x^{aa}\ i_x^{(e)}\ \frac{l_{[x+\frac{1}{2}]+y-x+\frac{1}{2}}^{i}}{l_{[x+\frac{1}{2}]}^{i}}\ v^{y-x+\frac{1}{2}} \sum_{z=x_0}^{x} v^{x-z+\frac{1}{2}}\ \frac{L_z^{aa}}{l_z^{aa}}}{\sum_{x=x_0}^{y} l_x^{aa}\ i_x^{(e)}\ \frac{l_{[x+\frac{1}{2}]+y-x-\frac{1}{2}}^{i}}{l_{[x+\frac{1}{2}]}^{i}}\ v^{y-x+\frac{1}{2}} \sum_{z=x_0}^{x} v^{x-z+\frac{1}{2}}\ \frac{L_z^{aa}}{l_z^{aa}}}.$$

Damit haben wir bewiesen, daß wir diese Aufgabe auf die vorhergehende zurückführen können.

Wenn Beziehung (57) besteht, wird auch der Gesamtbarwert der jährlichen Prämien nach beiden Tafeln denselben Wert ergeben, denn die Prämien werden nur während der Aktivität bezahlt, sind also nach Aggregat- und Selektionstafeln identisch mit der Einmaleinlage der Aktiven.

J. B u l i n a [15] versucht nach einer anderen Methode den Gebrauch der Selektionstafeln zu umgehen.

Er stellt sich die Aufgabe, die Invalidenausscheidewahrscheinlichkeit $\sigma_{[x]+t}^{i}$ die bis jetzt meistens als eine Funktion zweier Variabeln aufgefaßt worden ist, auf die Form

$$f_1(x)+f_2(x)\ f(t) \quad \text{zu bringen.}$$

Folgende Voraussetzungen werden gemacht:

Die Invaliden des Eintrittsalters x, $L_{[x]}^{ii}$ werden in eine Gruppe $L_{[x]}^{ii}\ s_x$ und in eine zweite $L_{[x]}^{ii}\ (1-s_x)$ eingeteilt.

s_x soll dadurch definiert sein, daß das Absterben von $L^{ii}_{[x]} \cdot s_x$ nicht mehr vom Alter, sondern nur noch von der Invaliditätsdauer abhängig ist. Der Verfasser bezeichnet mit $L^{ii}_{[x]} \cdot s_x$ diejenigen Invaliden, die mit einer sog. „selektiven" Krankheit behaftet sind. Das Absterben der zweiten Gruppe $L^{ii}_{[x]}\,(1-s_x)$ erfolgt unabhängig von der Invaliditätsdauer nach der Schlußtafel, sodaß also folgende Gleichung angenommen werden kann:

$$\text{(58)} \qquad \mathfrak{a}^{i}_{[x]} = s_x\, \mathfrak{a}^{is}_{o} + (1-s_x)\, \mathfrak{a}^{i}_{x},$$

wo

$$\mathfrak{a}^{is}_{o} = \frac{1}{D^{is}_{o}} \sum_{t=o}^{\omega} D^{is}_{t} = \frac{N^{is}_{o}}{D^{is}_{o}}, \qquad D^{is}_{t} = l^{is}_{t}\, v^{t}$$

und allgemein $\mathfrak{a}^{is}_{t} = \dfrac{1}{D^{is}_{t}} \sum_{\tau=t}^{\omega} D^{is}_{\tau} = \dfrac{N^{is}_{t}}{D^{is}_{t}}$.

Für $\mathfrak{a}^{i}_{[x]+t}$ erhält Bulina die Formel:

$$\text{(59)} \qquad \mathfrak{a}^{i}_{[x]+t} = \frac{(1-s_x)\,\dfrac{l^{i}_{x+t}}{l^{i}_{x}}\,\mathfrak{a}^{i}_{x+t} + s_x\,\dfrac{l^{is}_{t}}{l^{is}_{o}}\,\mathfrak{a}^{is}_{t}}{(1-s_x)\,\dfrac{l^{i}_{x+t}}{l^{i}_{x}} + s_x\,\dfrac{l^{is}_{t}}{l^{is}_{o}}}.$$

Er versucht nun weiter, eine Beziehung zwischen dem Rentenbarwert nach der Aggregattafel, den er mit ${}^{a}\mathfrak{a}^{i}_{x}$ bezeichnet, und den Größen $\mathfrak{a}^{i}_{[x]}$, $\mathfrak{a}^{is}_{t}$ herzuleiten.

Wir gehen in Anlehnung an Bulina wie folgt vor:

Befindet sich die Kasse im Beharrungszustand, so gilt:

$$\text{(60)} \qquad {}^{a}\mathfrak{a}^{i}_{x} = \frac{\sum_{t=o}^{\omega} l^{ii}_{[x-t]+t}\; \mathfrak{a}^{i}_{[x-t]+t}}{{}^{s}l^{ii}_{x}}$$

und

$$\text{(61)} \qquad l^{ii}_{[x-t]+t} = l^{aa}_{x-t-\frac{1}{2}}\; i^{(e)}_{x-t-\frac{1}{2}}\; \frac{l^{i}_{[x-t]+t}}{l^{i}_{[x-t]}}.$$

Berücksichtigen wir unsere angenommenen Voraussetzungen, dann erhalten wir:

$$(62)\quad {}^{ii}l_{[x-t]+t} = {}^{aa}l_{x-t-\frac{1}{2}}\ {}^{(e)}i_{x-t-\frac{1}{2}}\ (1-s_{x-t})\ \frac{{}^{i}l_{x}}{{}^{i}l_{x-t}} + {}^{aa}l_{x-t-\frac{1}{2}}\ {}^{(e)}i_{x-t-\frac{1}{2}}\ s_{x-t}\ \frac{{}^{is}l_{t}}{{}^{is}l_{o}}.$$

Das erste Glied der Summe bezeichnen wir mit ${}^{1}l^{ii}_{[x-t]+t}$ das zweite mit ${}^{2}l^{ii}_{[x-t]+t}$.

Es ist also:

$$(63)\quad {}^{ii}l_{[x-t]+t} \cdot {}^{i}\mathfrak{a}_{[x-t]+t} = {}^{1}l^{ii}_{[x-t]+t}\ {}^{i}\mathfrak{a}_{x} + {}^{2}l^{ii}_{[x-t]+t}\ {}^{is}\mathfrak{a}_{t}.$$

Berücksichtigen wir noch die Gleichung (58), dann folgt:

$$(64)\quad {}^{a}\mathfrak{a}^{i}_{x} = \frac{({}^{s}l^{ii}_{x} - \sum_{t=o}^{\omega} {}^{2}l^{ii}_{[x-t]+t})\ \frac{{}^{i}\mathfrak{a}_{[x]} - s_{x}\,{}^{is}\mathfrak{a}_{o}}{1-s_{x}} + \sum_{t=o}^{\omega} {}^{2}l^{ii}_{[x-t]+t}\ {}^{is}\mathfrak{a}_{t}}{{}^{s}l^{ii}_{x}}.$$

Bulina hat die Anwendbarkeit seiner Untersuchungen an dem Material der schwedischen Pensionsversicherung (1921 bis 1925) und dem Material der tschechoslowakischen Versicherung der Bergarbeiter (1927—31) gezeigt.

Eine Schwierigkeit besteht einzig darin, die Zahlen s_x je nach dem Beobachtungsmaterial annähernd genau zu bestimmen.

F. Borch [16] hat zur Vereinfachung der versicherungstechnischen Berechnungen bei doppelt abgestuften Tafeln eine Methode gezeigt, bei der man sich nur auf die Schlußtafel nebst einer einfachen Hilfstafel zu stützen braucht.

Mit f_x bezeichnet er das Verhältnis:

$$f_x = \frac{l_x}{l_{[x]}}$$

und geht von folgender Fundamentalgleichung aus:

$$(65)\quad l_{[x]+t} = l_{x+t} - (l_x - l_{[x]})\ \varphi(x,t) = l_{x+t} - l_x\ \frac{f_x - 1}{f_x}\ \varphi(x,t)$$

Zur Berechnung der Funktion $\varphi(x,t)$ sind die Zahlenwerte

$$\varphi(x,t) = \frac{l_{x+t} - l_{[x]+t}}{l_x - l_{[x]}} \tag{66}$$

gegeben.

Der Verfasser zeigt an einigen Beispielen, daß sich die Funktion $\varphi(x,t)$ nur wenig mit x ändert, also in eine Funktion $\varphi(t)$ übergeführt werden kann.

Hat man $\varphi(t)$ analytisch bestimmt, dann erhält man mit Hilfe der Formeln:

$$\begin{aligned} D_{[x]+t} &= D_{x+t} - D_x \frac{f_x - 1}{f_x} \Phi(t), \\ N_{[x]+t} &= N_{x+t} - D_x \frac{f_x - 1}{f_x} \sum_{t}^{t_o-1} \Phi(t), \end{aligned} \tag{67}$$

wobei $\varphi(t)\, v^t = \Phi(t)$ ist, den Barwert der Leibrente sehr einfach:

$$\mathfrak{a}_{[x]} = f_x\, \mathfrak{a}_x - (f_x - 1) \sum_{o}^{t_o-1} \Phi(t), \tag{68}$$

und für $o < t < t_o$

$$\mathfrak{a}_{[x]+t} = \frac{f_x\, N_{x+t} - (f_x - 1)\, D_x \sum_{t}^{t_o-1} \Phi(t)}{f_x\, D_{x+t} - (f_x - 1)\, D_x\, \Phi(t)}. \tag{68'}$$

Gelingt es uns in unserem Falle eine ähnliche Funktion

$$\varphi^i(x,t) = \frac{l^i_{x+t} - l^i_{[x]+t}}{l^i_x - l^i_{[x]}} \tag{69}$$

zu finden, welche unabhängig von x ist, also in eine Funktion $\varphi^i(t)$ übergeführt werden kann, so können wir den Barwert für die Invalidenrente „I" $\mathfrak{a}^i_{[x]+t}$ in analoger Weise bestimmen.

Wir haben in der nachfolgenden Tabelle nach unserem Material einige Zahlenwerte der Funktion $\varphi^i(x,t)$ bestimmt.

$\varphi^i(x,t)$

[x] \ t	1	2	3	4
25	0.46	0.19	0.06	0.01
30	0.49	0.21	0.07	0.01
35	0.51	0.23	0.08	0.02
40	0.53	0.24	0.09	0.02
45	0.52	0 23	0.08	0.02
50	0.52	0.24	0.08	0.02
55	0.52	0.23	0.08	0.02
60	0.37	0.12	0.04	0.02
65	0.51	0.22	0.07	0.01

In den Kolonnen zeigen sich keine größeren Abweichungen mit Ausnahme des Alters 60. Hier können aber die Angaben auf Ungenauigkeiten beruhen, die dadurch bedingt sind, daß in der Nähe des Alters 60, Zähler und Nenner von $\varphi^i(x,t)$ in der Gleichung (69) ihre Vorzeichen ändern und deshalb sehr kleine Werte annehmen.

F. B o r c h hat in einer neueren Publikation [17] ebenfalls eine Anwendung seiner Methode auf die Invalidenversicherung untersucht.

Der Verfasser ist bestrebt, eine vereinfachte Herstellung der Invaliden-Selektions-Sterbetafel zu erzielen. Er legt dabei seinen Untersuchungen eine empirisch bestimmte Funktion $\varphi^i(t)$ zugrunde, die aber wesentlich dazu beiträgt, daß die Resultate ungenau werden.

Wir haben nun an einigen Beispielen gesehen, daß nur bei Zugrundelegung der Selektionstafeln in allen Fällen genaue Prämien- und Reserveberechnungen möglich sind. Wohl geben uns die, unter den erwähnten Voraussetzungen aus den Selektionstafeln berechneten verallgemeinerten Aggregattafeln in eini-

gen Fällen einen Ersatz. Zu exakten Resultaten führen sie aber nur, wenn die angenommenen Voraussetzungen in der Praxis wirklich zutreffen. Es kommt hier namentlich auf die Verteilung der Invaliden in bezug auf das Alter und auf die Invaliditätsdauer an. Wir wollen deshalb im nächsten Kapitel die Verteilung der Invaliden bei der E. V. K. und bei der P. H. K. näher untersuchen.

IV. Kapitel.

Die Verteilung der Invaliden bei der E. V. K. und bei der P. H. K. am 31. Dezember 1937

A. Die Altersverteilung der Invaliden.

W. Friedli hat in einer interessanten Arbeit [18] als Anwendung von Methoden der mathematischen Statistik die Altersgliederung der Rentenbezüger bei der eidg. Versicherungskasse in den Jahren 1921—1924 untersucht. Betrachtet man die Gruppe der Rücktrittsgehaltsbezüger und Invaliden, die W. Friedli kurz mit „Rentner" bezeichnet, so zeigt sich eine recht regelmäßige Verteilung um ein bestimmtes mittleres Alter. Mit Hilfe der Bruns'schen Entwicklungsreihe $\mathfrak{S}(x)$ (vgl. Czuber, Wahrsch. Rechnung I. (1924), pag. 406) findet man die gesuchte Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$ durch numerische Differentiation der Beziehung

$$\mathfrak{V}(x) = \frac{d\,\mathfrak{S}(x)}{d\,x}. \tag{70}$$

Es zeigt sich, daß die Altersverteilung der Rentner recht gut durch eine solche Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$ dargestellt werden kann. W. Friedli hat sich die Frage gestellt, ob man mit Hilfe von $\mathfrak{V}(x)$ des Jahres 1923 zum voraus die mutmaßliche Altersgliederung der Rentner im Jahre 1924 angeben könne. Er kommt in Beantwortung dieser Frage zu folgendem Schluß:

„Die Altersgliederung der Rentner der eidg. Versicherungskasse weist nach den Statistiken der 4 Jahre 1921—1924 eine merkwürdige Stabilität auf, die ihren Ausdruck in einer regelmäßigen Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$ findet."

Es wird interessant sein, schreibt der Verfasser, auch in Zukunft zu untersuchen, ob sich bei anderen größeren Pensionskassen etwas ähnliches feststellen läßt.

Wir haben in Tabelle I die Altersverteilung der Pensionierten der E. V. K. bezw. P. H. K. vom 31. Dez. 1937 wiedergegeben. In der dritten Kolonne (3) haben wir die Verteilung für die Invaliden beider Kassen nach der in [18] pag. 61 angegebenen Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$ berechnet. Es ergeben sich dabei interessante Vergleiche, und es zeigt sich, daß die Altersgliederung der beiden Pensionskassen Ende 1937 nicht denselben Verlauf wie die nach der Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$ berechneten nimmt. Die graphische Darstellung I zeigt sehr deutlich, daß der Verlauf der Kurve (1) + (2) steiler ist, als derjenige der Kurve (3). Dies mag dadurch zu erklären sein, daß die Invalidierungswahrscheinlichkeit in den jüngeren Jahren abgenommen, in den älteren dagegen zugenommen hat. Es ist aber auch hier, bei der Altersverteilung der Pensionierten der E. V. K. und P. H. K. am 31. Dez. 1937, anhand der graphischen Darstellung I nicht zu verkennen, daß eine gewisse Aehnlichkeit mit der Gauß'schen Fehlerkurve besteht.

B. Die Verteilung der Invaliden in bezug auf die Invaliditätsdauer.

Die Benutzung einer Selektionstafel für die Invalidensterblichkeit macht es notwendig, den Invalidenbestand nach der abgelaufenen Invaliditätsdauer aufzuteilen. Wir haben diese Abstufung in Tabelle II an den Invaliden der Jahre 1930—1937 vorgenommen und geben im folgenden einen Auszug davon, indem wir für 5-jährige Altersgruppen die Besetzungsverhältnisse $\frac{L^{ii}_{[x-t]+t}}{L^{ii}_{x}}$ in Prozenten wiedergeben.

$$\frac{L^{ii}_{[x-t]+t}}{L^{ii}_{x}} \quad in\ \%$$

Altersgruppen	t / $[x-t]$	0	1	2	3	4	5 u. mehr	Total
28—32	30	17.1	17.6	14.1	13.7	11.2	26.3	100%
38—42	40	13.6	11.7	10.5	9.9	7.3	47.0	100%
48—52	50	17.7	13 6	10.3	8.1	6.3	44.0	100%
58—62	60	12.9	12.2	10 9	9.6	8.2	46.2	100%
68—72	70	2.0	2.7	3.8	4.9	5.3	81.3	100%

Da nun sowohl die Altersverteilung, als auch die Verteilung der Invaliden in bezug auf die Invaliditätsdauer fortwährenden Aenderungen unterworfen sind, ist es interessant, ihre Werte auf den Beharrungszustand umzurechnen.

Die Verteilung im Beharrungszustand.

Wir haben in Tabelle III die $l^{ii}_{[x]+t}$ auf Grund der im dritten Kapitel pag. 40 angegebenen Methode und unter Benutzung des Tabellenwerkes „Technische Grundlagen für Pensionskassen, Oktober 1937, Sammlung III, 3½ %“ berechnet. Die Werte für die Invalidensterblichkeit haben wir unserer Tabelle V entnommen.

Zum Vergleich mit den unter B. angegebenen Besetzungsverhältnissen, führen wir die entsprechenden nach Tabelle III berechneten Werte an.

$$\frac{l^{ii}_{[x-t]+t}}{s l^{ii}_{x}} \quad in\ \%$$

Altersgruppen	t / $[x-t]$	0	1	2	3	4	5 u. mehr	Total
28—32	30	15.3	12.8	11.1	10.0	9.2	41.6	100%
38—42	40	11.0	9.4	8.2	7.4	6.7	57.3	100%
48—52	50	17.2	13.3	10.2	8.0	6.4	44.9	100%
58—62	60	15.6	13.7	11.8	10.0	8.4	40.5	100%
68—72	70	3.1	4.0	4.9	5.9	6.7	75.4	100%

Wenn wir diese Tabelle mit der vorher angegebenen vergleichen, so können wir nur geringe Abweichungen feststellen. Namentlich beim Zentralalter 50 sind die Besetzungsverhältnisse in beiden Tabellen nahezu dieselben. Immerhin zeigt sich, daß die Besetzungen der Invaliden im Beharrungszustand $\frac{100 \cdot l^{ii}_{[x-t]+t}}{l^{ii}_{x}}$ für $[x-t] < 50$ und $t < 5$ unter denjenigen der entsprechenden $\frac{100 \cdot L^{ii}_{[x-t]+t}}{L^{ii}_{x}}$ Ende 1937 liegen; für $[x-t] > 50$ und $t < 5$ macht sich dann das Gegenteil bemerkbar.

V. Kapitel.

Anwendungen und Schlussfolgerungen

A. Das Deckungskapital der Aktiven und Invaliden bei Verwendung von Aggregat- und Selektions-Sterbetafeln.

Wir nehmen im folgenden an, die Kasse befinde sich im natürlichen Beharrungszustand, d. h. ihre Mitglieder setzen sich auf Grund der Beziehung

$$A + J = c \left(\sum_x l_x^{aa} + \sum_y {}^s l_y^{ii} \right)$$

zusammen.

Wir setzen $c = 1$ und entnehmen die zu den nachfolgenden Berechnungen notwendigen Grundlagen dem Tabellenwerk: „Technische Grundlagen für Pensionskassen, Okt. 1937, Sammlung III, 3½ %."

Es berechnet sich dann

a) das Deckungskapital der Invaliden für die Invalidenrente „1" bei Zugrundelegung der Selektionstafel nach der Formel:

(71) $$ {}^sV(J) = \sum_{x,t} l^{ii}_{[x-t]+t} \, \mathrm{a}^i_{[x-t]+t} . $$

Das Einzeldeckungskapital für die Rente „1" ist nur abhängig vom Barwert der Invalidenrente „1", d. h. $\mathrm{a}^i_{[x-t]+t}$, dessen Verlauf wir in Tabelle IX und in der graphischen Darstellung III angegeben haben.

Benützen wir die Aggregattafel, dann berechnet sich das Deckungskapital der Invaliden für die Rente „1" nach der Formel:

(72) $$ V(J) = \sum_x {}^s l^{ii}_x \, {}^B\mathrm{a}^i_x . $$

Wie Tabelle X zeigt, erhalten wir aus unserem Material verschiedene Rentenbarwerte, je nachdem wir die Aggregatsterbenswahrscheinlichkeiten ${}^{B}q_x^i$ oder q_x^i verwenden, wobei

$$ {}^{B}q_x^i = \frac{\sum_{t=o}^{\omega_2} {}^{s}l_{[x-t]+t}^{ii} \; q_{[x-t]+t}^{i}}{{}^{s}l_x^{ii}} $$

und

$$ q_x^i = \frac{\sum_{t=o}^{\omega_2} L_{[x-t]+t}^{ii} \; q_{[x-t]+t}^{i}}{L_x^{ii}}. $$

In unserem Falle ist dieser Unterschied allerdings nicht groß, kann aber je nach der Verschiedenheit der tatsächlichen Verteilung der Invaliden von derjenigen im Beharrungszustand größer werden.

Wir bringen nun einen Vergleich zwischen den aus der Selektionstafel berechneten Werte ${}^{s}a_x^i$, die nach der Gleichung

$$ {}^{s}a_x^i = \frac{\sum_{t=o}^{\omega_2} {}^{s}l_{[x-t]+t}^{ii} \; a_{[x-t]+t}^{i}}{{}^{s}l_x^{ii}} \tag{73} $$

bestimmt wurden, und den Aggregatwerten ${}^{B}a_x^i$.

x	${}^{s}a_x^i$	${}^{B}a_x^i$	$\frac{{}^{B}a_x^i \cdot 100}{{}^{s}a_x^i}$
25	15.322	11.446	74.7
30	17.118	14.613	85.4
35	17.244	15.415	89.4
40	16.211	14.810	91.4
45	14.850	13.929	93.8
50	13.634	13.230	97.0
55	12.471	12.416	99.6
60	11.211	11.263	100.5
65	9.746	9.784	100.4
70	8.132	8.135	100.0
75	6.462	6.462	100.0

Grüngard hat in seiner Dissertation [19] den Berechnungen der ${}^{s}a_x^i$ und a_x^i das schwedische Material zugrunde gelegt und hat folgende Resultate erhalten:

x	${}^{s}a_x^i$	a_x^i	$\frac{a_x^i \cdot 100}{{}^{s}a_x^i}$
15	9.005	5.991	66.5
20	11.225	8.326	74.2
30	12.687	10.507	82.8
40	12.669	11.319	89.4
50	11.919	11.252	94.8
60	10.501	10.339	98.5
70	8.359	8.359	100.0

Nach dieser Tabelle von Grüngard liegen alle Werte a_x^i unter den Werten ${}^{s}a_x^i$, d. h. die Deckungskapitalien berechnet nach der Aggregattafel ergeben überall zu kleine Werte.

Das Gesamtdeckungskapital von 811 809 Invaliden wird 2,46 % zu klein, wenn man die Aggregattafel benutzt. Bei den 327 338 weniger als 70-jährigen Invaliden beträgt die Abweichung sogar 4,41 % (vgl. [19], pp. 66 und 68).

Ein Blick auf unsere Tabelle zeigt, daß diese Abweichungen bei unserem Material nicht so groß sein können, da beispielsweise bei den Altern 60 und 65, d. h. da, wo relativ am meisten Invalide vorhanden sind, ${}^{B}a_x^i$ größer als ${}^{s}a_x^i$ ist. Wenn dieser Unterschied auch nicht so bedeutend ist, so wird sich doch diese Tatsache auf die Abweichung im Gesamtdeckungskapital auswirken.

Wir erhalten nach unserem Material folgende Resultate:

$$ {}^{s}V(J) = \sum_{x=20}^{\omega_1} \sum_{t=o}^{\omega_2} l^{ii}_{[x-t]+t} \, {}^{s}a^{i}_{[x-t]+t} = 7969013, $$

$$ {}^{B}V(J) = \sum_{x=20}^{\omega_1} {}^{s}l^{ii}_{x} \, {}^{B}a^{i}_{x} = 7920733. $$

Das nach der in Tabelle X angegebenen Aggregattafel (1) berechnete Gesamtdeckungskapital von 1 178 252 Invaliden wird um 0.606 % zu klein. Es wurde auch hier vorausgesetzt, daß alle Invaliden die Invalidenrente „1" beziehen.

Benutzen wir die Aggregattafel (2), dann erhalten wir:

$$V(J) = \sum_{x=25}^{\omega_1} {}^{s}l_x^{ii}\ \mathfrak{a}_x^i = 7\,886\,608,$$

was gegenüber dem entsprechenden nach der Selektionstafel berechneten Wert ${}^{s}V(J)$ eine Abweichung im gleichen Sinne von 0.856 % ergibt.

Betrachten wir nur die 693 144 bis und mit 70-jährigen Invaliden, dann erhalten wir:

$${}^{s}V(J) = \sum_{x=20}^{70} \sum_{t=o}^{\omega_2} l_{[x-t]+t}^{ii}\ {}^{s}\mathfrak{a}_{[x-t]+t}^{i} = 7\,288\,352,$$

$${}^{B}V(J) = \sum_{x=20}^{70} {}^{s}l_x^{ii}\ {}^{B}\mathfrak{a}_x^i = 7\,240\,072,$$

$$V(J) = \sum_{x=25}^{70} {}^{s}l_x^{ii}\ \mathfrak{a}_x^i = 7\,205\,947.$$

${}^{B}V(J)$ und $V(J)$ ergeben Werte, die um 0.662 % bezw. 0.938 % zu klein sind.

In allen Fällen liegen die Abweichungen unter einem Prozent und sind geringer als die nach andersartigem Material von Grüngard berechneten. Wir sehen damit unsere ausgesprochene Vermutung bewiesen.

b) Das Deckungskapital der Aktiven.

Nehmen wir an, daß die Eintritte in die gleichbleibende Gesamtheit nur im Alter a erfolgen, dann ist die Prämie nach der kontinuierlichen Methode

$$P = \frac{\bar{a}_a^{ai}}{\bar{a}_a^{aa}} \tag{74}$$

und das Deckungskapital der Aktiven

(75) $$ {}_tV(A) = \int_0^\infty {}_tV(\bar{a}_a^{ai})\ l_{a+t}^{aa}\ dt, $$

wo

$$ {}_tV(\bar{a}_a^{ai}) = \bar{a}_{a+t}^{ai} - P\,\bar{a}_{a+t}^{aa}. $$

Wird die Rente jährlich ausbezahlt und zwar die erste unmittelbar beim Eintritt der Invalidität, die in der Mitte des Jahres erfolgen soll, dann erhalten wir für a_x^{ai} die Formel:

(76) $$ a_x^{ai} = \frac{\sum_{z=x}^{\infty} i_z\ a_{z+½}^{i}\ v^{½}\ D_z^{aa}}{D_x^{aa}}, $$

wobei näherungsweise gilt:

$$ a_{z+½}^{i} = \frac{a_z^i + a_{z+1}^i}{2}. $$

Bezeichnen wir mit

$$ D_x^{ai} = i_x\ a_{x+½}^{i}\ v^{½}\ D_x^{aa}, $$

so wird

$$ a_x^{ai} = \frac{\sum_{z=x}^{\infty} D_z^{ai}}{D_x^{aa}} = \frac{N_x^{ai}}{D_x^{aa}}. $$

Die Werte a_x^{ai} sind nach der Selektions- und Aggregattafel (1) berechnet worden und in Tabelle XIa bezw. XIb angegeben.

Wir bringen auszugsweise die folgenden Werte:

x	${}^{S}a_x^{ai}$	${}^{B}a_x^{ai}$
20	2.420	2.412
30	3.330	3.348
40	4.600	4.625
50	6.341	6.369
60	7.668	7.635
70	6.231	6.220

Zur Berechnung des Deckungskapitales müssen wir noch die Prämien auf Grund der Formeln:

$$ {}^{B}P = \frac{{}^{B}a_a^{ai}}{a_a^{aa}} $$

und

$$ {}^{s}P = \frac{{}^{s}a_a^{ai}}{a_a^{aa}} $$

berechnen.

Es wird

$$ {}^{B}P = 0.1145 $$

und

$$ {}^{s}P = 0.1149. $$

Die Einzeldeckungskapitalien der Aktiven sind ebenfalls in Tabelle XIa bezw. XIb wiedergegeben.

Die Unterschiede der nach der Aggregattafel (1) und der nach der Selektionstafel berechneten Werte sind, wie folgende Tabelle zeigt, noch wesentlich geringer als bei den Deckungskapitalien der Invaliden.

x	${}_{x-20}V({}^{s}a_{a+t}^{ai})$	${}_{x-20}V({}^{B}a_{a+t}^{ai})$	$\frac{{}_{x-20}V({}^{B}a_{a+t}^{ai}) \cdot 100}{{}_{x-20}V({}^{s}a_{a+t}^{ai})}$
20	0.000	0.000	100.0
30	1.230	1.256	102.1
40	2.947	2.977	101.0
50	5.252	5.284	100.6
60	7.121	7.090	99.6
70	5.914	5.904	99.8

Das Gesamtdeckungskapital von 3 823 892 Aktiven für die Anwartschaft auf eine Invalidenrente „1“ wird nach der Selektionstafel

$$ {}^{s}V(A) = \sum_{t=0}^{78} l_{a+t}^{aa} \; {}_{t}V({}^{s}a_{a+t}^{ai}) = 12\,192\,214 $$

und nach der Aggregattafel (1)

$$^{B}V\,(A) = \sum_{t=0}^{78} l^{aa}_{a+t}\ {}_{t}V\,(^{B}a^{ai}_{a+t}) = 12\,253\,934,$$

was einen um 0.509 % zu hohen Wert ergibt.

Vergleichen wir diese Resultate mit denen von Grüngard [19] und von A. Urech [20], so kommen wir hier zu derselben Schlußfolgerung, nämlich daß es sich bei der Berechnung der Gesamtdeckungskapitalien der Aktiven und Invaliden nicht lohnt, eine Selektionstafel zu verwenden.

B. Schlußbemerkung.

Unsere praktischen Untersuchungen am Beobachtungsmaterial der E. V. K. und der P. H. K. haben im wesentlichen die an andersartigem Material gemachten Feststellungen über den Einfluß der Invaliditätsdauer auf die Sterblichkeit der Invaliden bestätigt. Lediglich bei den Invaliden über 60 Jahren zeigt sich bei uns ein anderer Verlauf, indem die Werte der Sterbenswahrscheinlichkeiten nach der Selekttafel niedriger ausfallen als die entsprechenden Werte der Schlußtafel. Die Abklärung der Frage, inwieweit dies eine Folge der Zwangspensionierungen und der Altersrücktritte ist, bleibt späteren Untersuchungen vorbehalten.

Der Unterschied, der nach der Selektions- und Aggregattafeln berechneten Gesamtdeckungskapitalien der Aktiven und Invaliden ist gering, sodaß man bei der Deckungskapitalberechnung für die beiden Pensionskassen die Aggregattafel benützen darf. Will man genauere Resultate erzielen, so genügen in vielen Fällen die im III. Kapitel angegebenen verallgemeinerten Aggregattafeln. Zur Bestimmung von Einzeldeckungskapitalien der Invaliden dürfte hingegen unsere Selektionstafel Verwendung finden.

Eine Unterteilung der Invalidengesamtheit nach der verflossenen Invaliditätsdauer ist unbedingt notwendig, um sich

ein Bild vom wirklichen Verlauf der Sterblichkeit im Bestande der Invaliden zu machen. Nur mit Hilfe einer nach der Invaliditätsdauer abgestuften Sterbetafel kann zuverlässig festgestellt werden, ob eine Veränderung der Sterblichkeit, die sich bei Anwendung einer Aggregattafel ergibt, auf einer zeitbedingten Aenderung der Sterblichkeit beruht oder ob sie ihren Grund in einer Strukturänderung des nach der Invaliditätsdauer geordneten Invalidenbestandes hat.

Im Zusammenhang mit der Konstruktion einer schweizerischen Invaliden-Selektions-Sterbetafel haben wir der Ausgleichung von doppelt abgestuften Sterbetafeln besondere Beachtung geschenkt. Es war uns darum zu tun, neben der Bearbeitung einer Uebersicht über ältere Ausgleichungsmethoden doppelt abgestufter Sterbetafeln, die Anwendung einer für praktische Zwecke rasch zum Ziele führenden neueren Methode an einem schweizerischen Material zu demonstrieren. Wir verfolgten damit das doppelte Ziel mit der Bearbeitung schweizerischen Materials aus jüngster Zeit eine bestehende Lücke in den mathematischen Grundlagen für schweizerische Pensionskassen auszufüllen und gleichzeitig eine moderne Ausgleichungsmethode bekannt zu machen.

Tabellen

Tabelle I. Die Altersverteilung der Invaliden bei der E. V. K. und bei der P. H. K. am 31. Dez. 1937.
- (1) Altersverteilung der Invaliden der E. V. K.
- (2) Altersverteilung der Invaliden der P. H. K.
- (3) Altersverteilung der Invaliden beider Kassen berechnet nach der Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$ ([18] pag. 61).

Tabelle II. Die Verteilung der Invaliden (E. V. K. und P. H. K.) der Jahre 1930—1937 in bezug auf Alter und zurückgelegte Invaliditätsdauer.

Tabelle III. Die Verteilung der Invaliden im Beharrungszustand.

Tabelle IV. Die zur Berechnung der rohen Sterbenswahrscheinlichkeiten notwendigen Größen $J_{[x]+t}$ (Invalide des Alters $x+t$ mit der Invaliditätsdauer t) und die davon im Laufe eines Jahres Gestorbenen $T^i_{[x]+t}$ aus den Beobachtungen an der E. V. K. und an der P. H. K. in den Jahren 1930 bis 1937.

Tabelle V. Ausgeglichene Invalidensterbenswahrscheinlichkeiten $q^i_{[x]+t}$.

Tabelle VI. Absterbeordnung der Invaliden $l^i_{[x]+t}$.

Tabelle VII. Diskontierte Zahlen der Lebenden $D^i_{[x]+t} = l^i_{[x]+t} \cdot v^{x+t}$, $v = 0.96618$.

Tabelle VIII. Kommutationszahlen $N^i_{[x]+t} = \sum D^i_{[x]+t}$.

Tabelle IX. Barwert der Invalidenrente „1".

Tabelle X. Aus den Selektions-Sterbenswahrscheinlichkeiten berechnete Aggregattafeln nach der Annahme:
- (1) Verteilung der Invaliden wie Tabelle III.
- (2) Verteilung der Invaliden wie Tabelle II.

Tabelle XIa. und XIb. Der Barwert des Aktiven für einen Anspruch auf die Invalidenrente „1" und die Einzeldeckungskapitalien berechnet nach
a) der Selektionstafel
b) der Aggregattafel (1).

Graphische Darstellungen

I. Die Altersverteilung der Invaliden am 31. Dezember 1937.
   1. E. V. K. und P. H. K. (vgl. Tab. I (1) und (2)).
   2. Nach der Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$ ([18], pag. 61) berechnet (vgl. Tab. I (3)).

II. Die ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten der Invaliden (vgl. Tab. V).
   Aggregattafel (vgl. Tab. X (1)).
   Aggregattafel aus den Beobachtungen bei der E. V. K. und bei der P. H. K. in den Jahren 1924—1935 (vgl. „Technische Grundlagen für Pensionskassen, Sammlung III, Oktober 1937, 3½ %").

III. Barwert der Invalidenrente „1" (vgl. Tab. IX u. Tab. X (1)).

Tabelle I.

Die Verteilung der Invalidenrentner nach dem Alter am 31. Dez. 1937.

x	bei der E.V.K. (1)	bei der P.H.K. (2)	(1)+(2)	nach Friedli (3)	x	bei der E.V.K. (1)	bei der P.H.K. (2)	(1)+(2)	nach Friedli (3)
25				5.2	65	320	625	945	746.2
26		1	1	5.2	66	300	568	868	753.1
27		1	1	6.9	67	286	530	816	734.2
28				12.1	68	271	461	732	701.4
29		1	1	13.8	69	273	432	705	668.7
30	1		1	15.5	70	238	376	614	627.3
31	1	1	2	20.7	71	244	375	619	577.3
32				22.4	72	198	317	515	532.5
33	2	2	4	27.6	73	171	288	459	472.2
34	3	3	6	34.5	74	153	232	385	417.1
35	8	4	12	37.9	75	150	232	382	363.6
36	6	9	15	44.8	76	111	159	270	311.9
37	5	6	11	50.0	77	106	142	248	263.7
38	7	10	17	56.9	78	87	119	206	218.9
39	18	9	27	63.8	79	69	128	197	181.0
40	20	9	29	70.7	80	58	94	152	146.5
41	16	12	28	79.3	81	60	83	143	115.5
42	21	20	41	87.9	82	36	53	89	91.3
43	20	17	37	96.5	83	27	39	66	68.9
44	18	21	39	105.5	84	20	43	63	53.4
45	32	25	57	118.9	85	18	34	52	39.6
46	24	28	52	131.0	86	14	27	41	29.3
47	34	30	64	146.5	87	14	12	26	22.4
48	36	42	78	165.4	88	7	13	20	13.8
49	43	69	112	187.9	89	5	5	10	10.3
50	53	95	148	213.7	90	4	3	7	6.9
51	63	116	179	243.0	91		6	6	5.2
52	70	158	228	277.5	92		4	4	3.4
53	76	186	262	317.1	93				3.4
54	89	225	314	358.5	94		1	1	1.7
55	101	280	381	405.0	95				
56	111	322	433	453.3	96				
57	147	349	496	503.2	97		1	1	
58	154	424	578	553.2	98				
59	167	487	654	596.3	99				
60	214	520	734	642.8	100				
61	247	558	805	689.4	101	1		1	
62	276	656	932	711.8					
63	265	635	900	737.6					
64	294	618	912	744.5	Total	5883	11351	17234	17234.0

Tabelle II.

Die Verteilung der Invalidenrentner nach Alter und Invaliditätsdauer bei der E. V. K. und bei der P. H. K. während der Jahre 1930—37.

$[x]$	$L^{ii}_{[x]}$	$L^{ii}_{[x-1]+1}$	$L^{ii}_{[x-2]+2}$	$L^{ii}_{[x-3]+3}$	$L^{ii}_{[x-4]+4}$	${}^{(5)}L^{ii}_{x}$ *	L^{ii}_{x}
25	2	1					3
26	2		2				4
27	5	2	3	2		1	13
28	7	6	3	5	2	1	24
29	7	5	5	2	6	2	27
30	3	8	4	4	3	8	30
31	10	6	10	6	6	17	55
32	8	11	7	11	6	26	69
33	10	6	10	7	11	36	80
34	15	10	8	10	6	46	95
35	24	12	10	8	9	52	115
36	26	19	11	9	13	59	137
37	20	23	19	12	10	76	160
38	23	19	24	19	9	84	178
39	33	24	20	24	20	86	207
40	25	37	21	17	24	108	232
41	38	25	36	23	15	134	271
42	46	36	26	37	20	156	321
43	55	41	41	28	37	200	402
44	49	56	46	49	34	257	491
45	67	55	53	48	51	313	587
46	83	49	47	58	49	361	647
47	124	74	61	46	64	427	796
48	142	115	71	59	51	505	943
49	176	145	112	76	62	553	1124
50	223	182	144	120	80	608	1357
51	300	213	171	143	104	663	1594
52	386	287	212	161	139	719	1904
53	430	338	275	194	161	854	2252
54	462	398	311	263	194	999	2627
55	515	442	375	304	256	1180	3072
56	577	504	422	371	285	1375	3534
57	655	545	450	407	338	1625	4020
58	677	621	511	429	375	1866	4479
59	670	631	565	458	393	2178	4895
60	712	618	573	535	420	2364	5222
61	660	650	554	548	459	2648	5519

$$*{}^{(5)}L^{ii}_{x} = \sum_{t=5}^{\omega_2} L^{ii}_{[x-t]+t}$$

Tabelle II.

(Fortsetzung)

[x]	$L^{ii}_{[x]}$	$L^{ii}_{[x-1]+1}$	$L^{ii}_{[x-2]+2}$	$L^{ii}_{[x-3]+3}$	$L^{ii}_{[x-4]+4}$	${}^{(5)}L^{ii}_{x}$	L^{ii}_{x}
62	610	620	613	508	464	2854	5669
63	484	559	564	567	418	3119	5711
64	388	454	517	526	484	3214	5583
65	414	340	420	461	433	3378	5446
66	267	362	331	389	401	3428	5178
67	205	263	336	318	329	3495	4946
68	151	190	239	337	272	3417	4606
69	103	134	180	224	292	3252	4185
70	96	89	131	172	198	3139	3825
71	18	87	91	114	149	2945	3404
72	7	17	86	89	95	2702	2996
73				86	46	2594	2726
74					46	2338	2384
75						2050	2050
76							1822
77							1596
78							1345
79							1147
80							907
81							735
82							591
83							561
84							334
85							283
86							200
87							136
88							95
89							70
90							46
91							27
92							16
93							9
94							6
95							4
96							
97							
98							
99							1
100							

Tabelle III.

Die Verteilung der Invaliden nach Alter und Invaliditätsdauer im Beharrungszustand.

$[x]$	$l^{ii}_{[x]}$	$l^{ii}_{[x-1]+1}$	$l^{ii}_{[x-2]+2}$	$l^{ii}_{[x-3]+3}$	$l^{ii}_{[x-4]+4}$	$^{(5)}l^{ii}_{x}$ *	$^{s}l^{ii}_{x}$
20							
21	145						145
22	134	106					240
23	124	101	87				312
24	119	95	84	78			376
25	118	92	79	75	73		437
26	118	94	78	72	70	70	502
27	117	95	80	71	67	137	567
28	117	96	82	73	67	200	635
29	117	98	84	76	70	261	706
30	117	99	87	78	72	323	776
31	121	100	89	80	75	388	853
32	125	106	91	83	77	454	936
33	130	111	97	85	80	522	1 025
34	139	117	103	92	82	592	1 125
35	148	127	109	98	89	665	1 236
36	157	137	120	105	95	743	1 357
37	170	146	129	115	102	828	1 490
38	184	159	139	125	112	920	1 639
39	197	172	151	134	122	1 021	1 797
40	215	184	164	147	131	1 131	1 972
41	237	200	175	159	144	1 249	2 164
42	263	220	191	170	156	1 378	2 378
43	293	245	209	184	166	1 514	2 611
44	332	273	232	202	180	1 657	2 876
45	384	309	259	224	197	1 808	3 181
46	456	357	293	249	218	1 971	3 544
47	557	425	339	282	242	2 149	3 994
48	690	521	404	326	274	2 305	4 520
49	857	647	495	389	317	2 527	5 232
50	1054	806	616	477	378	2 785	6 116
51	1286	994	768	594	464	3 095	7 201
52	1555	1217	950	740	577	3 480	8 519
53	1855	1477	1165	916	719	3 962	10 094
54	2179	1768	1416	1123	889	4 567	11 942
55	2531	2083	1698	1366	1089	5 316	14 083
56	2911	2426	2003	1621	1324	6 234	16 519
57	3322	2795	2336	1934	1571	7 347	19 305
58	3799	3194	2693	2256	1873	8 659	22 474

$$^{*}\,^{(5)}l^{ii}_{x} = \sum_{t=5}^{\omega_2} l^{ii}_{[x-t]+t}$$

Tabelle III.

(Fortsetzung)

$[x]$	$l^{ii}_{[x]}$	$l^{ii}_{[x-1]+1}$	$l^{ii}_{[x-2]+2}$	$l^{ii}_{[x-3]+3}$	$l^{ii}_{[x-4]+4}$	$^{(5)}l^{ii}_{x}$	$^{s}l^{ii}_{x}$
59	4331	3658	3079	2600	2182	10 214	26 064
60	4827	4174	3527	2972	2513	12 008	30 021
61	5207	4656	4026	3403	2871	14 049	34 212
62	5416	5027	4493	3885	3284	16 347	38 452
63	5415	5233	4850	4334	3748	18 943	42 523
64	5195	5238	5048	4674	4176	21 869	46 200
65	4767	5029	5051	4859	4498	25 063	49 267
66	4153	4616	4846	4854	4666	28 384	51 519
67	3411	4019	4443	4650	4650	31 653	52 826
68	2643	3296	3862	4253	4443	34 662	53 159
69	1959	2549	3161	3688	4052	37 213	52 622
70	1413	1874	2438	3041	3502	39 133	51 401
71	999	1342	1779	2314	2879	40 291	49 604
72	694	943	1266	1678	2184	40 654	47 419
73	474	651	885	1189	1576	40 204	44 979
74	319	443	609	828	1112	39 094	42 405
75	212	296	412	566	769	37 339	39 594
76							36 609
77							33 527
78							30 412
79							27 210
80							24 073
81							21 042
82							18 149
83							15 447
84							12 960
85							10 692
86							8 650
87							6 842
88							5 261
89							3 909
90							2 732
91							1 738
92							996
93							508
94							227
95							87
96							28
97							7
98							1

Tabelle IV.

Die während der Jahre 1930—1937 unter Beobachtung gestandenen Invaliden der E. V. K. und der P. H. K. und die von diesen während eines Jahres Gestorbenen nach Alter und Invaliditätsdauer geordnet.

Altersgruppen	Zentralalter $[x]$	$J_{[x]}$	$T^i_{[x]}$	$J_{[x]+1}$	$T^i_{[x]+1}$	$J_{[x]+2}$	$T^i_{[x]+2}$	$J_{[x]+3}$	$T^i_{[x]+3}$	$J_{[x]+4}$	$T^i_{[x]+4}$	${}^{(5)}J_{x+5}$	${}^{(5)}T^i_{x+5}$	Zentralalter $x+$
31—35	33	67	7	58	3	58	2	58	2	61	1	413	4	38
36—40	38	127	8	128	6	127	4	129	2	130	2	1 060	14	43
41—45	43	255	20	237	6	248	7	260	9	277	6	2 454	50	48
46—50	48	748	46	729	46	710	27	694	18	678	11	4 415	113	53
51—55	53	2093	99	1969	62	1833	45	1774	46	1647	53	9 408	287	58
56—60	58	3291	124	3065	66	2816	82	2616	68	2245	76	15 213	557	63
61—65	63	2556	76	2335	74	2168	82	2031	76	1727	64	16 731	849	68
66—70	68	822	29	763	38	727	28	685	23	534	40	12 629	806	73

Tabelle V.

Die nach unserer im II. Kapitel, Abschnitt C angegebenen Ausgleichungsmethode ausgeglichenen 1000-fachen Sterbenswahrscheinlichkeiten aus den Erfahrungen der E. V. K. und der P. H. K. während der Jahre 1930—1937.

$[x]$	$q^i_{[x]}$	$q^i_{[x]+1}$	$q^i_{[x]+2}$	$q^i_{[x]+3}$	$q^i_{[x]+4}$	${}^{(5)}q^i_{x+5}$	$x+5$
20	279.0	188.2	117.4	66.4	35.4	24.3	25
21	265.0	178.8	111.6	63.2	33.7	23.1	26
22	251.1	169.6	105.9	60.0	32.1	22.0	27
23	237.2	160.2	100.1	56.8	30.4	20.8	28
24	223.3	150.9	94.3	53.6	28.7	19.6	29
25	209.4	141.6	88.6	50.4	27.1	18.5	30
26	195.4	132.2	82.8	47.2	25.4	17.3	31
27	181.5	122.9	77.1	44.0	23.7	16.2	32
28	167.6	113.6	71.3	40.8	22.0	15.0	33
29	153.7	104.3	65.6	37.6	20.4	13.9	34
30	139.2	94.9	59.8	34.4	18.7	12.8	35
31	125.8	85.5	53.9	31.1	17.1	11.8	36
32	111.9	76.1	48.1	27.9	15.6	11.0	37
33	98.0	66.8	42.5	25.0	14.3	10.5	38
34	86.0	58.8	37.6	22.5	13.4	10.3	39
35	77.3	52.9	34.1	20.7	12.8	10.4	40
36	71.6	49.1	31.8	19.7	12.8	11.0	41
37	68.2	46.9	30.7	19.5	13.3	12.1	42
38	66.8	46.1	30.5	19.9	14.3	13.7	43
39	66.8	47.0	32.0	21.7	16.2	15.4	44
40	67.6	48.3	33.6	23.5	17.9	16.9	45
41	68.8	49.7	35.0	24.9	19.2	18.0	46
42	69.9	50.9	36.3	26.1	20.3	19.0	47
43	70.4	51.6	37.1	27.0	21.2	19.8	48
44	70.0	51.6	37.5	27.6	22.0	20.6	49
45	69.0	51.2	37.6	28.0	22.6	21.3	50
46	67.1	50.2	37.3	28.3	23.2	22.1	51
47	65.2	49.2	37.0	28.6	23.9	23.0	52
48	62.6	47.5	36.4	28.8	24.7	24.1	53
49	59.7	46.4	36.2	29.4	25.7	25.3	54
50	56.4	44.7	35.8	29.8	26.7	26.5	55
51	53.4	43.2	35.5	30.4	27.8	27.7	56
52	50.1	41.5	35.1	30.9	28.8	28.9	57
53	46.8	39.8	34.7	31.3	29.8	30.1	58
54	43.9	38.4	34.4	31.8	30.7	31.2	59
55	41.6	37.3	34.3	32.4	31.8	32.4	60

Tabelle V.

(Fortsetzung.)

$[x]$	$q^i_{[x]}$	$q^i_{[x]+1}$	$q^i_{[x]+2}$	$q^i_{[x]+3}$	$q^i_{[x]+4}$	${}^{(5)}q^i_{x+5}$	$x+5$
56	39.8	36.7	34.5	33.3	33.1	33.8	61
57	38.3	36.2	34.7	34.1	34.2	35.0	62
58	37.2	35.9	35.1	34.9	35.3	36.2	63
59	36.3	35.4	35.0	35.3	36.2	37.7	64
60	35.4	35.1	35.4	36.3	37.8	39.8	65
61	34.6	35.2	36.2	37.8	39.8	42.3	66
62	33.7	35.4	37.4	39.7	42.3	45.2	67
63	32.7	35.8	38.9	42.0	45.2	48.4	68
64	31.9	36.4	40.6	44.5	48.2	51.7	69
65	31.7	37.4	42.6	47.3	51.4	55.0	70
66	32.3	39.1	45.1	50.3	54.7	58.3	71
67	33.5	41.2	47.8	53.4	58.0	61.5	72
68	35.4	43.7	50.7	56.5	61.0	64.3	73
						71.3	74
						78.9	75
						87.1	76
						95.9	77
						105.3	78
						115.3	79
						125.9	80
						137.5	81
						148.9	82
						161	83
						175	84
						191	85
						209	86
						231	87
						257	88
						301	89
						364	90
						427	91
						490	92
						553	93
						616	94
						679	95
						742	96
						805	97
						868	98
						931	99
						1000	100

Tabelle VI.

$[x]$	$l^i_{[x]}$	$l^i_{[x]+1}$	$l^i_{[x]+2}$	$l^i_{[x]+3}$	$l^i_{[x]+4}$	${}^{(5)}l^i_{x+5}$	$x+5$
20	100 000	72 100	58 531	51 659	48 229	46 522	25
21	93 513	68 732	56 443	50 144	46 975	45 392	26
22	87 654	65 644	54 511	48 738	45 814	44 343	27
23	82 259	62 747	52 695	47 420	44 727	43 367	28
24	77 341	60 071	51 006	46 196	43 720	42 465	29
25	72 857	57 601	49 445	45 064	42 793	41 633	30
26	68 714	55 287	47 978	44 005	41 928	40 863	31
27	64 936	53 150	46 618	43 024	41 131	40 156	32
28	61 457	51 157	45 346	42 113	40 395	39 506	33
29	58 274	49 317	44 173	41 275	39 723	38 913	34
30	55 283	47 588	43 072	40 496	39 103	38 372	35
31	52 590	45 974	42 043	39 777	38 540	37 881	36
32	50 084	44 480	41 095	39 118	38 027	37 434	37
33	47 796	43 112	40 232	38 522	37 559	37 022	38
34	45 882	41 936	39 470	37 986	37 131	36 633	39
35	44 429	40 995	38 826	37 502	36 726	36 256	40
36	43 363	40 258	38 281	37 064	36 344	35 879	41
37	42 607	39 701	37 839	36 677	35 962	35 484	42
38	42 046	39 237	37 428	36 286	35 564	35 055	43
39	41 730	38 942	37 112	35 924	35 144	34 575	44
40	41 393	38 595	36 731	35 497	34 663	34 043	45
41	40 979	38 160	36 263	34 994	34 123	33 468	46
42	40 490	37 660	35 743	34 446	33 547	32 866	47
43	39 878	37 071	35 158	33 854	32 940	32 242	48
44	39 146	36 406	34 527	33 232	32 315	31 604	49
45	38 325	35 681	33 854	32 581	31 669	30 953	50
46	37 417	34 906	33 154	31 917	31 014	30 294	51
47	36 488	34 109	32 431	31 244	30 350	29 625	52
48	35 515	33 292	31 711	30 557	29 677	28 944	53
49	34 562	32 499	30 991	29 869	28 999	28 246	54
50	33 545	31 653	30 238	29 155	28 286	27 531	55
51	32 549	30 811	29 477	28 431	27 567	26 801	56
52	31 516	29 937	28 695	27 688	26 832	26 059	57
53	30 476	29 050	27 894	26 926	26 083	25 306	58
54	29 460	28 167	27 085	26 153	25 321	24 544	59
55	28 485	27 300	26 282	25 381	24 559	23 778	60

Tabelle VI.
(Fortsetzung.)

$[x]$	$l^i_{[x]}$	$l^i_{[x]+1}$	$l^i_{[x]+2}$	$l^i_{[x]+3}$	$l^i_{[x]+4}$	$^{(5)}l^i_{x+5}$	$x+5$
56	27 564	26 467	25 496	24 616	23 796	23 008	61
57	26 634	25 614	24 687	23 830	23 017	22 230	62
58	25 725	24 768	23 879	23 041	22 237	21 452	63
59	24 790	23 890	23 044	22 237	21 452	20 675	64
60	23 899	23 053	22 244	21 457	20 678	19 896	65
61	23 035	22 238	21 455	20 678	19 896	19 104	66
62	22 172	21 425	20 667	19 894	19 104	18 296	67
63	21 305	20 608	19 871	19 098	18 296	17 469	68
64	20 425	19 773	19 053	18 279	17 466	16 624	69
65	19 548	18 928	18 220	17 444	16 619	15 765	70
66	18 690	18 086	17 379	16 595	15 760	14 898	71
67	17 829	17 232	16 523	15 733	14 893	14 029	72
68	16 971	16 370	15 655	14 861	14 021	13 166	73
						12 319	74
						11 441	75
						10 538	76
						9 620	77
						8 698	78
						7 782	79
						6 885	80
						6 018	81
						5 190	82
						4 418	83
						3 706	84
						3 058	85
						2 474	86
						1 957	87
						1 505	88
						1 118	89
						781	90
						497	91
						285	92
						145	93
						65	94
						25	95
						8	96
						2	97

Tabelle VII.

$[x]$	$D^i_{[x]}$	$D^i_{[x]+1}$	$D^i_{[x]+2}$	$D^i_{[x]+3}$	$D^i_{[x]+4}$	${}^{(5)}D^i_{x+5}$	$x+5$
20	50 257	35 010	27 460	23 417	21 122	19 686	25
21	45 407	32 246	25 585	21 961	19 877	18 558	26
22	41 123	29 756	23 874	20 623	18 731	17 516	27
23	37 287	27 481	22 298	19 387	17 668	16 551	28
24	33 872	25 419	20 853	18 248	16 686	15 659	29
25	30 829	23 550	19 531	17 199	15 780	14 833	30
26	28 093	21 839	18 311	16 227	14 938	14 066	31
27	25 650	20 285	17 190	15 329	14 159	13 355	32
28	23 455	18 864	16 156	14 497	13 435	12 695	33
29	21 489	17 571	15 206	13 728	12 765	12 082	34
30	19 696	16 381	14 325	13 013	12 141	11 511	35
31	18 103	15 290	13 510	12 350	11 561	10 979	36
32	16 657	14 293	12 759	11 734	11 021	10 483	37
33	15 359	13 385	12 069	11 165	10 518	10 017	38
34	14 245	12 580	11 440	10 637	10 046	9 576.2	39
35	13 328	11 882	10 872	10 147	9 600.5	9 157.2	40
36	12 568	11 273	10 357	9 688.9	9 179.4	8 755.6	41
37	11 931	10 742	9 891.5	9 263.5	8 775.8	8 366.4	42
38	11 376	10 257	9 453.2	8 854.9	8 385.3	7 985.9	43
39	10 909	9 835.6	9 056.4	8 470.2	8 006.2	7 610.0	44
40	10 455	9 418.3	8 660.4	8 086.6	7 629.3	7 239.6	45
41	10 000	8 997.4	8 261.1	7 702.2	7 256.6	6 876.7	46
42	9 546.7	8 579.3	7 867.0	7 325.3	6 892.9	6 524.6	47
43	9 084.6	8 159.3	7 476.7	6 956.0	6 539.2	6 184.3	48
44	8 616.0	7 742.1	7 094.3	6 597.2	6 198.3	5 856.9	49
45	8 150.2	7 331.4	6 720.7	6 249.4	5 868.9	5 542.1	50
46	7 688.1	6 929.5	6 359.3	5 914.9	5 553.1	5 240.9	51
47	7 243.6	6 542.4	6 010.1	5 594.2	5 250.6	4 951.8	52
48	6 812.1	6 169.7	5 677.9	5 286.4	4 960.5	4 674.5	53
49	6 405.0	5 818.9	5 361.4	4 992.6	4 683.3	4 407.2	54
50	6 006.2	5 476.0	5 054.3	4 708.5	4 413.5	4 150.6	55
51	5 631.0	5 150.1	4 760.5	4 436.1	4 156.0	3 903.8	56
52	5 267.9	4 834.8	4 477.3	4 174.2	3 908.3	3 667.3	57
53	4 921.9	4 532.7	4 205.3	3 922.0	3 670.7	3 441.1	58
54	4 596.6	4 246.5	3 945.2	3 680.5	3 443.1	3 224.6	59
55	4 294.4	3 976.5	3 698.7	3 451.3	3 226.6	3 018.1	60
56	4 015.0	3 724.7	3 466.9	3 234.1	3 020.4	2 821.7	61
57	3 748.2	3 483.0	3 243.4	3 024.7	2 822.8	2 634.0	62
58	3 498.1	3 254.0	3 031.0	2 825.7	2 634.9	2 456.0	63
59	3 256.9	3 032.4	2 826.1	2 634.9	2 456.0	2 287.1	64
60	3 033.5	2 827.2	2 635.7	2 456.6	2 287.4	2 126.5	65

Tabelle VII.

(Fortsetzung.)

$[x]$	$D^i_{[x]}$	$D^i_{[x]+1}$	$D^i_{[x]+2}$	$D^i_{[x]+3}$	$D^i_{[x]+4}$	${}^{(5)}D^i_{x+5}$	$x+5$
61	2 825.0	2 635.0	2 456.4	2 287.4	2 126.5	1 972.7	66
62	2 627.2	2 452.9	2 286.2	2 126.3	1 972.7	1 825.4	67
63	2 439.2	2 279.7	2 123.8	1 972.1	1 825.4	1 684.0	68
64	2 259.4	2 113.3	1 967.4	1 823.7	1 683.7	1 548.4	69
65	2 089.3	1 954.5	1 817.8	1 681.6	1 547.9	1 418.7	70
66	1 929.9	1 804.4	1 675.3	1 545.7	1 418.2	1 295.2	71
67	1 778.8	1 661.1	1 538.9	1 415.8	1 294.8	1 178.4	72
68	1 636.0	1 524.7	1 408.8	1 292.0	1 177.8	1 068.6	73
						966.06	74
						866.88	75
						771.38	76
						680.33	77
						594.39	78
						513.83	79
						439.16	80
						370.93	81
						309.08	82
						254.18	83
						206.03	84
						164.23	85
						128.39	86
						98.109	87
						72.903	88
						52.334	89
						35 339	90
						21.715	91
						12.024	92
						5.9243	93
						2.5586	94
						0.94933	95
						0.29441	96
						0.073404	97
						0.013825	98
						0.001763	99
						0.000118	100

Tabelle VIII.

$[x]$	$N^i_{[x]}$	$N^i_{[x]+1}$	$N^i_{[x]+2}$	$N^i_{[x]+3}$	$N^i_{[x]+4}$	${}^{(5)}N^i_{x+5}$	$x+5$
20	516 496	466 239	431 229	403 769	380 352	359 230	25
21	484 620	439 213	406 967	381 382	359 421	339 544	26
22	455 093	413 970	384 214	360 340	339 717	320 986	27
23	427 591	390 304	362 823	340 525	321 138	303 470	28
24	401 997	368 125	342 706	321 853	303 605	286 919	29
25	378 149	347 320	323 770	304 239	287 040	271 260	30
26	355 835	327 742	305 903	287 592	271 365	256 427	31
27	334 974	309 324	289 039	271 849	256 520	242 361	32
28	315 413	291 958	273 094	256 938	242 241	229 006	33
29	297 070	275 581	258 010	242 804	229 076	216 311	34
30	279 785	260 089	243 708	229 383	216 370	204 229	35
31	263 532	245 429	230 139	216 629	204 279	192 718	36
32	248 203	231 546	217 253	204 494	192 760	181 739	37
33	233 752	218 393	205 008	192 939	181 774	171 256	38
34	220 187	205 942	193 362	181 922	171 285	161 239	39
35	207 493	194 165	182 283	171 411	161 264	151 663	40
36	195 572	183 004	171 731	161 371	151 685	142 506	41
37	184 354	172 423	161 681	151 790	142 526	133 750	42
38	173 710	162 334	152 077	142 624	133 769	125 384	43
39	163 675	152 766	142 931	133 874	125 404	117 398	44
40	154 038	143 583	134 164	125 504	117 417	109 788	45
41	144 766	134 766	125 768	117 507	109 805	102 548	46
42	135 883	126 336	117 757	109 890	102 565	95 671.6	47
43	127 363	118 278	110 119	102 642	95 686.2	89 147.0	48
44	119 211	110 595	102 853	95 758.2	89 161.0	82 962.7	49
45	111 426	103 276	95 944.8	89 224.1	82 974.7	77 105.8	50
46	104 009	96 320.5	89 391.0	83 031.7	77 116.8	71 563.7	51
47	96 963.9	89 720.3	83 177.7	77 167.6	71 573.4	66 322.8	52
48	90 277.6	83 465.5	77 295.8	71 617.9	66 331.5	61 371.0	53
49	83 957.7	77 552.7	71 733.8	66 372.4	61 379.8	56 696.5	54
50	77 947.8	71 941.6	66 465.6	61 411.3	56 702.8	52 289.3	55
51	72 272.4	66 641.4	61 491.3	56 730.8	52 294.7	48 138.7	56
52	66 897.4	61 629.5	56 794.7	52 317.4	48 143.2	44 234.9	57
53	61 820.2	56 898.3	52 365.6	48 160.3	44 238.3	40 567.6	58
54	57 038.4	52 441.1	48 195.3	44 250.1	40 569.6	37 126.5	59
55	52 549.4	48 255.0	44 278.5	40 579.8	37 128.5	33 901.9	60
56	48 344.9	44 329.9	40 605.2	37 138.3	33 904.2	30 883.8	61
57	44 384.2	40 636.0	37 153.0	33 909.6	30 884.9	28 062.1	62
58	40 671.8	37 173.7	33 919.7	30 888.7	28 063.0	25 428.1	63
59	37 178.4	33 921.5	30 889.1	28 063.0	25 428.1	22 972.1	64
60	33 925.4	30 891.9	28 064.7	25 428.1	22 972.4	20 685.0	65

Tabelle VIII.

(Fortsetzung.)

$[x]$	$N^i_{[x]}$	$N^i_{[x]+1}$	$N^i_{[x]+2}$	$N^i_{[x]+3}$	$N^i_{[x]+4}$	${}^{(5)}N^i_{x+5}$	$x+5$
61	30 888.8	28 063.8	25 428.8	22 972.4	20 685.0	18 558.5	66
62	28 051.0	25 423.9	22 971.0	20 684.8	18 558.5	16 585.8	67
63	25 400.6	22 961.4	20 681.7	18 557.9	16 585.8	14 760.4	68
64	22 923.9	20 664.5	18 551.2	16 583.8	14 760.1	13 076.4	69
65	20 619.1	18 529.8	16 575.3	14 757.5	13 075.9	11 528.0	70
66	18 482.8	16 552.9	14 748.5	13 073.2	11 527.5	10 109.3	71
67	16 503.5	14 724.7	13 063.6	11 524.7	10 108.9	8 814.1	72
68	14 675.0	13 039.0	11 514.3	10 105.5	8 813.5	7 635.7	73
						6 567.1	74
						5 601.1	75
						4 734.2	76
						3 962.8	77
						3 282.5	78
						2 688.1	79
						2 174.2	80
						1 735.1	81
						1 364.2	82
						1 055.1	83
						800.89	84
						594.86	85
						430.63	86
						302.24	87
						204.13	88
						131.23	89
						78.894	90
						43.555	91
						21.840	92
						9.8158	93
						3.8915	94
						1.3329	95
						0.38352	96
						0.08911	97
						0.01571	98
						0.00188	99
						0.000118	100

Tabelle IX.

$[x]$	$a^i_{[x]}$	$a^i_{[x]+1}$	$a^i_{[x]+2}$	$a^i_{[x]+3}$	$a^i_{[x]+4}$	${}^{(5)}a^i_{x+5}$	$x+5$
20	10.277	13.317	15.704	17.243	18.007	18.248	28
21	10.673	13.621	15.906	17.365	18.082	18.296	26
22	11.067	13.912	16.093	17.473	18.137	18.325	27
23	11.468	14.203	16.272	17.565	18.176	18.335	28
24	11.868	14.482	16.434	17.638	18.195	18.323	29
25	12.266	14.748	16.577	17.689	18.190	18.288	30
26	12.666	15.007	16.706	17.723	18.166	18.230	31
27	13.059	15.249	16.814	17.734	18.117	18.148	32
28	13.448	15.477	16.904	17.724	18.031	18.039	33
29	13.824	15.684	16.968	17.687	17.946	17.904	34
30	14.205	15.877	17.014	17.627	17.821	17.742	35
31	14.557	16.052	17.035	17.541	17.670	17.553	36
32	14.901	16.200	17.027	17.427	17.490	17.337	37
33	15.219	16.316	16.986	17.281	17.282	17.097	38
34	15.457	16.371	16.902	17.103	17.050	16.837	39
35	15.568	16.341	16.766	16.893	16.797	16.562	40
36	15.561	16.234	16.581	16.655	16.525	16.276	41
37	15.452	16.051	16.345	16.386	16.241	15.987	42
38	15.270	15.827	16.087	16.107	15.953	15.701	43
39	15.004	15.532	15.782	15.805	15.663	15.427	44
40	14.733	15.245	15.492	15.520	15.390	15.165	45
41	14.477	14.978	15.224	15.256	15.132	14.912	46
42	14.233	14.729	14.968	15.001	14.880	14.663	47
43	14.020	14.496	14.728	14.756	14.633	14.415	48
44	13.836	14.285	14.498	14.515	14.385	14.165	49
45	13.672	14.087	14.276	14.277	14.138	13.913	50
46	13.529	13.900	14.057	14.038	13.887	13.655	51
47	13.386	13.714	13.840	13.794	13.631	13.394	52
48	13.253	13.528	13.613	13.548	13.372	13.129	53
49	13.108	13.328	13.380	13.294	13.106	12.865	54
50	12.978	13.138	13.150	13.043	12.848	12.598	55
51	12.835	12.940	12.917	12.788	12.583	12.331	56
52	12.699	12.747	12.685	12.536	12.318	12.062	57
53	12.560	12.553	12.452	12.280	12.052	11.789	58
54	12.408	12.349	12.216	12.023	11.783	11.514	59
55	12.237	12.135	11.971	11.758	11.507	11.233	60
56	12.041	11.902	11.712	11.483	11.225	10.945	61
57	11.841	11.667	11.455	11.211	10.941	10.654	62

Tabelle IX.

(Fortsetzung.)

$[x]$	$a^{i}_{[x]}$	$a^{i}_{[x]+1}$	$a^{i}_{[x]+2}$	$a^{i}_{[x]+3}$	$a^{i}_{[x]+4}$	${}^{(5)}a^{i}_{x+5}$	$x+5$
58	11.627	11.424	11.191	10.931	10.650	10.353	63
59	11.415	11.186	10.930	10.650	10.353	10.044	64
60	11.184	10.927	10.648	10.351	10.043	9.727	65
61	10.934	10.650	10.352	10.043	9.727	9.408	66
62	10.677	10.365	10.048	9.728	9.408	9.086	67
63	10.413	10.072	9.738	9.410	9.086	8.765	68
64	10.146	9.778	9.429	9.093	8.766	8.445	69
65	9.869	9.481	9.118	8.776	8.448	8.126	70
66	9.577	9.174	8.803	8.458	8.128	7.805	71
67	9.278	8.864	8.489	8.140	7.807	7.480	72
68	8.970	8.552	8.173	7.822	7.483	7.146	73
						6.798	74
						6.461	75
						6.137	76
						5.825	77
						5.522	78
						5.231	79
						4.951	80
						4.678	81
						4.414	82
						4.151	83
						3.887	84
						3.622	85
						3.354	86
						3.081	87
						2.800	88
						2.508	89
						2.232	90
						2.006	91
						1.816	92
						1.657	93
						1.521	94
						1.404	95
						1.303	96
						1.214	97
						1.136	98
						1.068	99
						1.000	100

Tabelle X.

	(1)					(2)				
x	${}^{B}q^{i}_{x}$ ‰	${}^{B}l^{i}_{x}$	${}^{B}D^{i}_{x}$	${}^{B}N^{i}_{x}$	${}^{B}\mathrm{a}^{i}_{x}$	q^{i}_{x} ‰	l^{i}_{x}	D^{i}_{x}	N^{i}_{x}	a^{i}_{x}
20	279.0	100 000	50 257	283 729	5.646					
21	265.0	72 100	35 010	233 472	6.669					
22	219.2	52 994	24 862	198 462	7.983					
23	180.3	41 378	18 756	173 600	9.256					
24	147.9	33 918	14 855	154 844	10.424					
25	122.3	28 902	12 230	139 989	11.446	189.9	100 000	42 315	396 282	9.365
26	102.9	25 367	10 371	127 759	12.319	144.9	81 010	33 120	353 967	10.687
27	87.7	22 757	8 989.2	117 388	13.059	120.5	69 272	27 363	320 847	11.726
28	75.5	20 761	7 923.4	108 399	13.681	103.7	60 925	23 252	293 484	12.622
29	65.4	19 194	7 077.8	100 475	14.195	86.1	54 607	20 136	270 232	13.420
30	56.8	17 939	6 391.3	93 397.5	14.613	64.6	49 905	17 780	250 096	14.066
31	49.6	16 920	5 824.4	87 006.2	14.938	57.5	46 681	16 069	232 316	14.457
32	41.8	16 081	5 348.4	81 181.8	15.179	46.7	43 997	14 633	216 247	14.778
33	37.9	15 409	4 951.5	75 833.4	15.315	37.3	41 942	13 478	201 614	14.959
34	33.2	14 825	4 602.9	70 881.9	15.399	35.8	40 378	12 537	188 136	15 010
35	29.4	14 333	4 299.6	66 279.0	15.415	35.0	38 932	11 679	175 602	15.036
36	26.4	13 912	4 032.1	61 979.4	15.371	32.1	37 569	10 889	163 923	15.054
37	24.4	13 545	3 793.0	57 947.3	15.277	27.4	36 363	10 183	153 034	15.028
38	23.1	13 215	3 575.5	54 154.3	15.146	25.8	35 367	9 568.9	142 851	14.928
39	22.5	12 910	3 374.8	50 578.8	14.997	26.8	34 455	9 006.9	133 282	14.797
40	22.6	12 620	3 187.4	47 204.0	14.810	25.1	33 532	8 469.2	124 275	14.673
41	23.3	12 335	3 010.1	44 016.6	14.623	26.2	32 690	7 977.3	115 806	14.517
42	24.5	12 048	2 840.7	41 006.5	14.435	27.6	31 834	7 505.8	107 829	14.366
43	26.1	11 753	2 677.5	38 165.8	14.254	28.3	30 955	7 051.9	100 323	14.226
44	27.6	11 446	2 519.3	35 488.3	14.087	28.1	30 079	6 620.4	93 271.0	14.088
45	29.0	11 130	2 366.9	32 969.0	13.929	28.9	29 234	6 216.9	86 650.6	13.938
46	30.0	10 807	2 220.5	30 602.1	13.782	29.2	28 389	5 833.1	80 433.7	13 789
47	31.1	10 483	2 081.1	28 381.1	13.638	31.2	27 560	5 471.2	74 600.6	13.635
48	32.0	10 157	1 948.2	26 300.5	13.500	31.7	26 700	5 121.3	69 129.4	13.498
49	32.6	9 832	1 822.1	24 352.3	13.365	32.5	25 854	4 791.3	64 008.1	13.359
50	32.9	9 511	1 702.9	22 530.2	13.230	32.8	25 014	4 478.8	59 216.8	13.222
51	33.0	9 198	1 591.2	20 827.3	13.089	33.2	24 194	4 185.6	54 738.0	13.078
52	32.9	8 894	1 486.6	19 236.1	12.940	33.6	23 391	3 909.8	50 552.4	12.930
53	32.8	8 601	1 389.0	17 749.5	12.779	33.0	22 605	3 650.7	46 642.6	12.776
54	32.6	8 319	1 298.0	16 360.5	12.604	32.5	21 859	3 410.7	42 991.9	12.605
55	32.5	8 048	1 213.2	15 062.5	12.416	32.3	21 149	3 188.4	39 581.2	12.414

Tabelle X.

(Fortsetzung.)

	(1)					(2)				
x	${}^{B}q_x^i$ ‰	${}^{B}l_x^i$	${}^{B}D_x^i$	${}^{B}N_x^i$	${}^{B}a_x^i$	q_x^i ‰	l_x^i	D_x^i	N_x^i	a_x^i
56	32.5	7 786	1 134.1	13 849.3	12.212	32.3	20 466	2 981.1	36 392.8	12.208
57	32.7	7 533	1 060.1	12 715.2	11.994	32.5	19 805	2 782.2	33 411.7	11.988
58	33.0	7 287	990.81	11 655.1	11.763	32.8	19 161	2 605.3	30 624.5	11.755
59	33.4	7 047	925.80	10 664.3	11.519	33.2	18 533	2 434.9	28 019.2	11.507
60	33.8	6 812	864.65	9 738.5	11.263	33.7	17 918	2 274.3	25 584.3	11.249
61	34.4	6 582	807.22	8 873.84	10.993	34.3	17 314	2 123.4	23 310.0	10.978
62	34.9	6 356	753.12	8 066.62	10.711	35.0	16 720	1 981.2	21 186.6	10.694
63	35.7	6 134	702.22	7 313.50	10.415	35.8	16 135	1 847.3	19 205.4	10.396
64	36.8	5 915	654.26	6 611.28	10.105	37.1	15 557	1 720.9	17 358.1	10.087
65	38.6	5 697	608.84	5 957.02	9.784	38.9	14 980	1 601.1	15 637.2	9.767
66	40.9	5 477	565.56	5 348.18	9.456	41.3	14 397	1 486.6	14 036.1	9.442
67	43.7	5 253	524.08	4 782.62	9.126	44.2	13 802	1 377.0	12 549.5	9.114
68	47.0	5 023	484.18	4 258.54	8.795	47.4	13 192	1 271.7	11 172.5	8.785
69	50.1	4 787	445.84	3 774.36	8.465	50.6	12 567	1 170.4	9 900.8	8.459
70	54.4	4 547	409.16	3 328.52	8.135	54.6	11 931	1 073.6	8 730.4	8.132
71	58.0	4 300	373.85	2 919.36	7.809	58.1	11 280	980.72	7 656.8	7.807
72	61.4	4 051	340.30	2 545.51	7.480	61.5	10 625	892.46	6 676.03	7.480
73	64.3	3 802	308.58	2 205.21	7.146	64.3	9 972	809.36	5 783.57	7.146

Tabelle XIa.

x	$a^{i}_{[x+1/2]}$	D^{ai}_{x}	N^{ai}_{x}	D^{aa}_{x}	${}^{s}a^{ai}_{x}$	${}^{s}P\,a^{aa}_{x}$	${}_{x-20}V({}^{s}a^{ai}_{x})$
20	10.475	776	121 488	50 257	2.420	2.420	0.000
21	10.870	724	120 712	48 416	2.493	2.393	0.100
22	11.268	672	119 988	46 639	2.573	2.365	0.208
23	11.668	618	119 316	44 927	2.656	2.335	0.321
24	12.067	616	118 698	43 277	2.743	2.305	0.438
25	12.466	613	118 082	41 689	2.832	2.274	0.558
26	12.863	609	117 469	40 154	2.925	2.241	0.684
27	13.254	605	116 860	38 676	3.022	2.208	0.814
28	13.636	599	116 255	37 248	3.121	2.173	0.948
29	14.015	593	115 656	35 874	3.224	2.137	1.087
30	14.381	586	115 063	34 550	3.330	2.100	1.230
31	14.729	626	114 476	33 275	3.440	2.061	1.379
32	15.060	617	113 851	32 040	3.553	2.021	1.532
33	15.338	651	113 234	30 851	3.670	1.979	1.691
34	15.513	679	112 583	29 701	3.791	1.937	1.854
35	15.565	700	111 904	28 587	3.915	1.893	2.022
36	15.507	713	111 204	27 510	4.042	1.847	2.195
37	15.361	759	110 491	26 465	4.175	1.801	2.374
38	15.137	757	109 732	25 453	4.311	1.753	2.558
39	14.869	787	108 975	24 471	4.453	1.704	2.749
40	14.605	810	108 188	23 519	4.600	1.653	2.947
41	14.355	861	107 378	22 594	4.753	1.601	3.152
42	14.127	904	106 517	21 692	4.910	1.548	3.362
43	13.928	969	105 613	20 815	5.074	1.494	3.580
44	13.754	1 052	104 644	19 955	5.244	1.438	3.806
45	13.601	1 176	103 392	19 115	5.409	1.382	4.027
46	13.458	1 355	102 416	18 287	5.600	1.324	4.276
47	13.322	1 601	101 061	17 469	5.785	1.266	4.519
48	13.183	1 900	99 460	16 658	5.971	1.207	4.764
49	13.043	2 255	97 560	15 846	6.157	1.148	5.009
50	12.907	2 632	95 305	15 031	6.341	1.089	5.252
51	12.767	3 068	92 673	14 213	6.520	1.030	5.490
52	12.630	3 523	89 605	13 385	6.694	0.972	5.722
53	12.484	3 987	86 082	12 546	6.861	0.915	5.946
54	12.323	4 434	82 095	11 695	7.020	0.858	6.162
55	12.139	4 887	77 661	10 836	7.167	0.802	6.365

Tabelle XIa.

(Fortsetzung.)

x	$a^{i}_{[x+\frac{1}{2}]}$	D^{ai}_{x}	N^{ai}_{x}	D^{aa}_{x}	${}^{s}a^{ai}_{x}$	${}^{s}P\,a^{aa}_{x}$	${}_{x-20}V({}^{s}a^{ai}_{x})$
56	11.941	5 310	72 774	9 964.6	7.303	0.747	6.556
57	11.734	5 742	67 464	9 084.6	7.426	0.693	6.733
58	11.521	6 254	61 722	8 193.2	7.533	0.641	6.892
59	11.300	6 719	55 468	7 287.8	7.611	0.592	7.019
60	11.059	6 973	48 749	6 357.2	7.668	0.547	7.121
61	10.806	6 983	41 776	5 433.4	7.689	0.505	7.184
62	10.545	6 719	34 793	4 533.1	7.675	0.468	7.207
63	10.270	6 194	28 074	3 681.0	7.627	0.434	7.193
64	10.008	5 475	21 880	2 900.0	7.545	0.406	7.139
65	9.723	4 599	16 405	2 210.5	7.421	0.381	7.040
66	9.562	3 692	11 806	1 626.4	7.259	0.362	6.897
67	9.158	2 710	8 114	1 157.0	7.013	0.348	6.665
68	8.761	1 883	5 404	800.60	6.750	0.336	6.414
69	8.362	1 264	3 521	542.91	6.485	0.327	6.158
70	7.998	832	2 257	362.21	6.231	0.317	5.914
71	7.653	538	1 425	238.04	5.986	0.308	5.678
72	7.315	341	887	154.31	5.748	0.298	5.450
73	6.972	213	546	98.772	5.528	0.286	5.242
74	6.630	131	333	62.501	5.328	0.271	5.057
75	6.299	79	202	39.097	5.167	0.249	4.918
76	5.981	47	123	24.156	5.092	0.217	4.875
77	5.674	42	76	14.783	5.141	0.210	4.931
78	5.377	34	34	6.6290	5.129	0.115	5.014

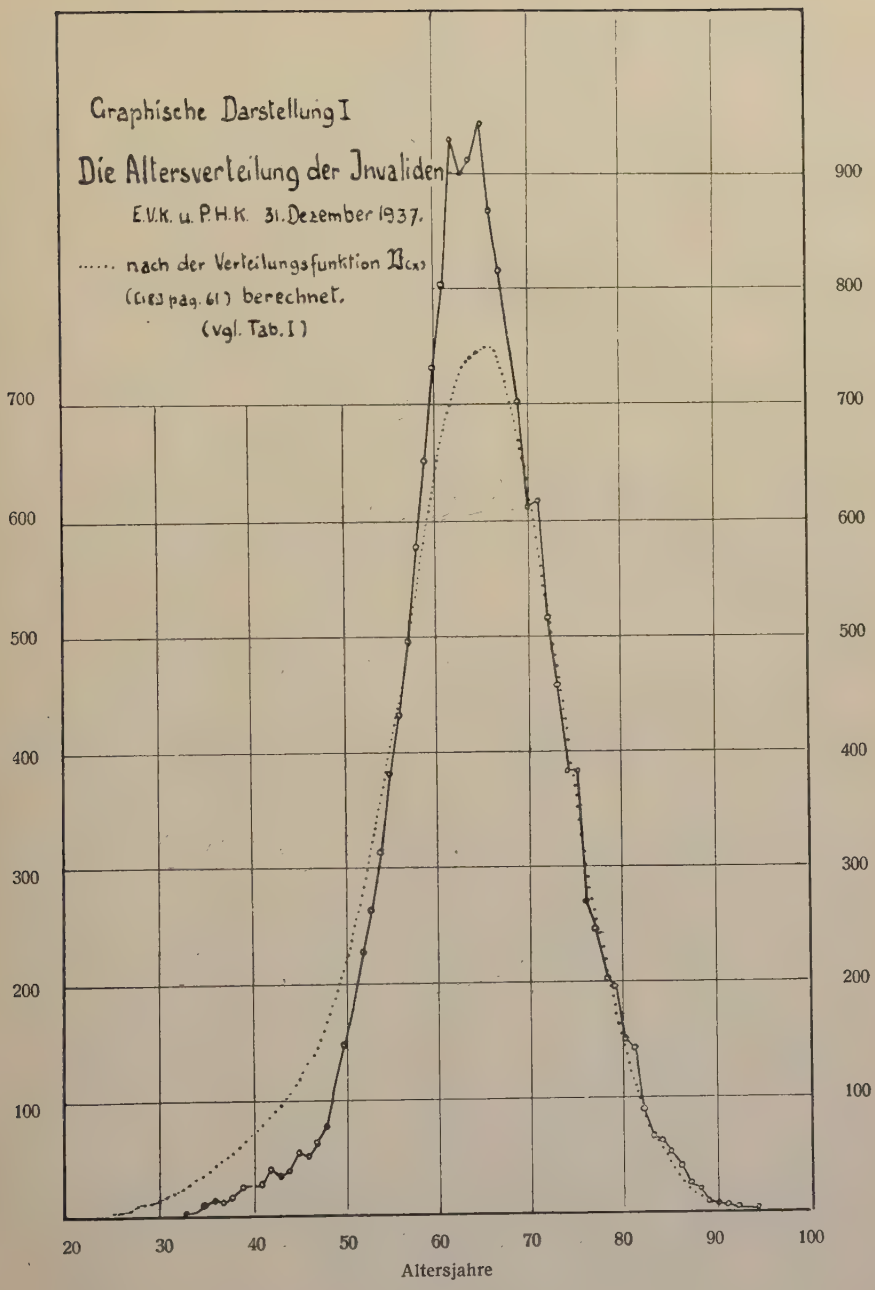
Tabelle XIb.

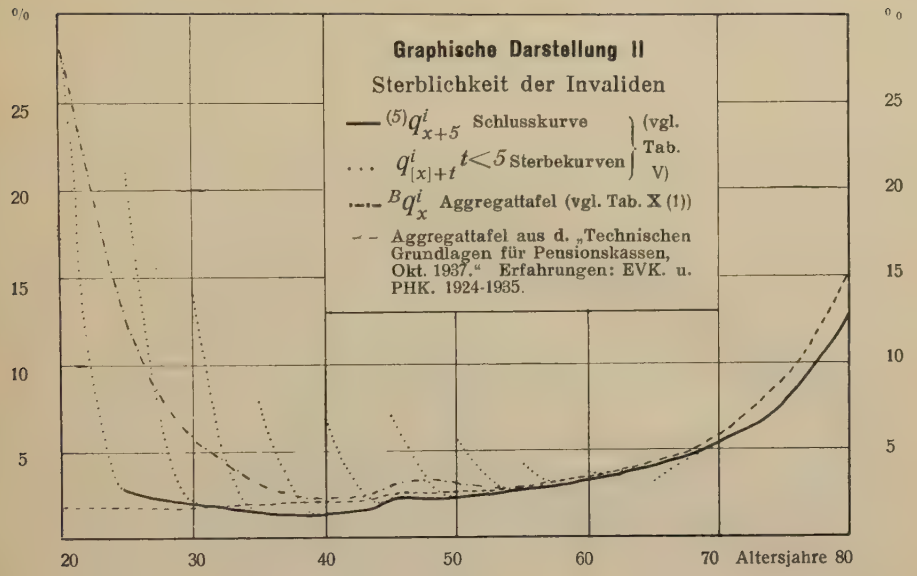
x	${}^{B}a^{i}_{[x+½]}$	${}^{B}D^{ai}_{x}$	N^{ai}_{x}	D^{aa}_{x}	${}^{s}a^{ai}_{x}$	${}^{s}P\,a^{aa}_{x}$	${}_{x-20}V({}^{s}a^{ai}_{x})$
20	6.157	456	121 220	50 257	2.412	2.412	0.000
21	7.326	488	120 764	48 416	2.494	2.384	0.110
22	8.620	514	120 276	46 639	2.579	2.356	0.223
23	9.840	521	119 762	44 927	2.666	2.327	0.339
24	10.935	558	119 241	43 277	2.755	2.297	0.458
25	11.883	584	118 683	41 689	2.847	2.266	0.581
26	12.689	601	118 099	40 154	2.941	2.234	0.707
27	13.370	610	117 498	38 676	3.038	2.200	0.838
28	13.938	612	116 888	37 248	3.138	2.166	0.972
29	14.404	609	116 276	35 874	3.241	2.130	1.111
30	14.776	602	115 667	34 550	3.348	2.092	1.256
31	15.059	640	115 065	33 275	3.458	2.054	1.404
32	15.247	624	114 425	32 040	3.571	2.014	1.557
33	15.357	652	113 801	30 851	3.689	1.972	1.717
34	15.407	675	113 149	29 701	3.810	1.930	1.880
35	15.393	692	112 474	28 587	3.934	1.886	2.048
36	15.324	704	111 782	27 510	4.063	1.841	2.222
37	15.212	752	111 078	26 465	4.197	1.795	2.402
38	15.072	754	110 326	25 453	4.334	1.747	2.587
39	14.904	789	109 572	24 471	4.478	1.698	2.780
40	14.717	817	108 783	23 519	4.625	1.648	2.977
41	14.529	871	107 966	22 594	4.779	1.596	3.183
42	14 345	918	107 095	21 692	4.937	1.543	3.394
43	14.171	986	106 177	20 815	5.101	1.489	3.612
44	14.008	1 072	105 191	19 955	5.271	1.433	3.838
45	13.856	1 198	104 119	19 115	5.447	1.377	4.070
46	13.710	1 380	102 921	18 287	5.628	1.319	4.309
47	13.069	1 571	101 541	17 469	5.813	1.261	4.552
48	13.433	1 936	99 970	16 658	6.001	1.203	4.798
49	13.298	2 299	98 034	15 846	6.187	1.144	5.043
50	13.160	2 683	95 735	15 031	6.369	1.085	5.284
51	13.015	3 127	93 052	14 213	6.547	1.027	5.520
52	12.860	3 587	89 925	13 385	6.718	0.969	5.749
53	12.692	4 054	86 338	12 546	6.882	0.911	5.971
54	12.510	4 501	82 284	11 695	7.036	0.855	6.181
55	12.314	4 958	77 783	10 836	7.178	0.799	6.379

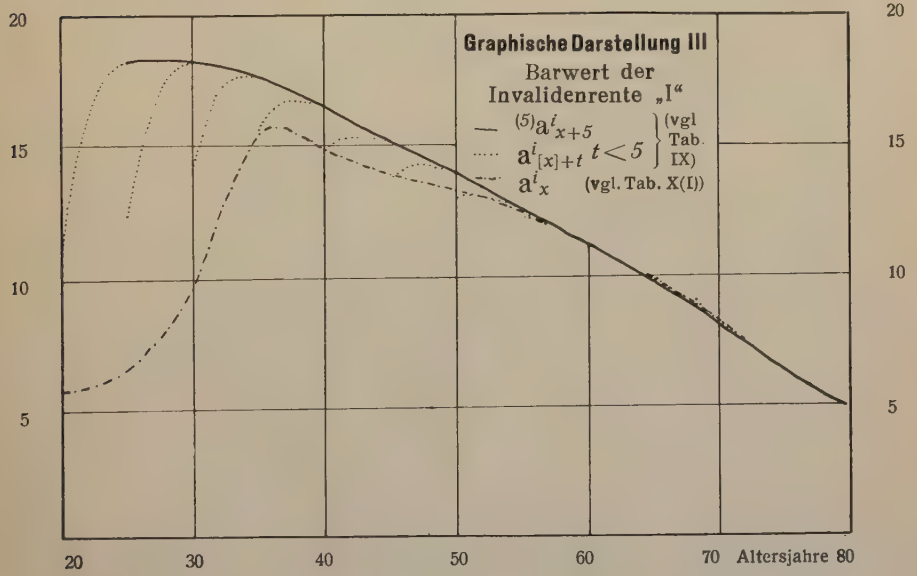
Tabelle XIb.

(Fortsetzung.)

x	${}^{B}a^{i}_{[x+½]}$	${}^{B}D^{ai}_{x}$	${}^{B}N^{ai}_{x}$	D^{aa}_{x}	${}^{s}a^{ai}$	${}^{s}P\,a^{aa}_{x}$	${}_{x-20}V({}^{s}a^{ai})$
56	12.103	5 382	72 825	9 964.6	7.308	0.744	6.564
56	11.879	5 813	67 443	9 084.6	7.424	0.691	6.733
58	11.941	6 319	61 630	8 193.2	7.522	0.639	6.888
59	11.391	6 773	55 311	7 287.8	7.590	0.590	7.000
60	11.128	7 016	48 538	6 357.2	7.635	0.545	7.090
61	10.852	7 013	41 522	5 433.4	7.642	0.503	7.139
62	10.563	6 730	34 509	4 533.1	7.613	0.466	7.147
63	10.260	6 188	27 779	3 681.0	7.547	0.433	7.114
64	9.945	5 440	21 591	2 900.0	7.445	0.404	7.041
65	9.620	4 550	16 151	2 210.5	7.306	0.380	6.926
66	9.291	3 587	11 601	1 626.4	7 133	0.361	6.772
67	8.961	2 652	8 024	1 157.0	6.927	0.346	6.581
68	8.630	1 855	5 362	800.60	6.697	0.335	6.362
69	8.300	1 254	3 507	542.91	6.460	0.326	6.134
70	7.972	829	2 253	362.21	6.220	0.316	5.904
71	7.645	537	1 424	238.04	5.982	0.307	5.675
72	7.313	341	887	154.31	5.748	0.297	5.451
73	6.972	213	546	98.772	5.528	0.285	5.234
74	6.630	131	333	62.501	5.328	0.270	5.058
75	6.299	79	202	39.097	5.167	0.248	4.919
76	5.981	47	123	24.156	5.092	0.216	4.876
77	5.674	42	76	14.783	5.141	0.166	4.975
78	5.377	34	34	6.6290	5.129	0.115	5.014


Graphische Darstellung I
Die Altersverteilung der Invaliden
E.V.K. u. P.H.K. 31. Dezember 1937.
..... nach der Verteilungsfunktion Π(x)
(cf. S) pag. 61) berechnet.
(vgl. Tab. I)
900
800
700
600
500
400
300
200
100
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Altersjahre


%
25
20
15
10
5
Graphische Darstellung II
Sterblichkeit der Invaliden
$^{(5)}q^{i}_{x+5}$ Schlusskurve
$q^{i}_{[x]+t}$ $t<5$ Sterbekurven
(vgl. Tab. V)
$^{B}q^{i}_{x}$ Aggregattafel (vgl. Tab. X (1))
Aggregattafel aus d. „Technischen Grundlagen für Pensionskassen, Okt. 1937." Erfahrungen: EVK. u. PHK. 1924-1935.
20
30
40
50
60
70
Altersjahre 80


20
15
10
5
Graphische Darstellung III
Barwert der Invalidenrente „I"
$^{(5)}a^{i}_{x+5}$
$a^{i}_{[x]+t}$ $t<5$
(vgl. Tab. IX)
a^{i}_{x} (vgl. Tab. X(I))
20
30
40
50
60
70
Altersjahre 80

Literaturverzeichnis

[1] Czuber E., Wahrscheinlichkeitsrechnung. Band II, 1928, pag. 125.

[2] Sprague, Journal of the Institute of Actuaries. Vol. XXI, 1879, pp. 229—252.

[3] Smolensky P., Sulle tavole compatte di mortalità. Atti del decimo congresso internazionale degli attuari, vol. II, communicazioni V, pag. 235.

[4] Poterin du Motel H., Usage et ajustement des tables de mortalité. Bulletin trimestriel de l'Institut des Actuaires français, No. 11, 1893, pag. 205.

[5] Patzig A., Die exakte Ausgleichung der englischen Selekttafel. Manes, Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Band 8, pag. 320.

[6] Schweer W., Ein Beitrag zur analytischen Ausgleichung von Selektionstafeln. Festschrift zu Ehren von Georg Höckner, Berlin 1935, pag. 86.

[7] Blaschke E., Zur Ausgleichung von zweifach abgestuften statistischen Reihen. Manes, Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Band 20, 1920, pag. 299.

[8] Jörgensen N. R., Ueber Hermann Olsens Formel für die Invalidensterblichkeit. VI. Int. Kongreß für Versicherungswissenschaft, Band 2, Wien 1909, pag. 715.

[9] Hundert Jahre Gothaer Lebensversicherungsbank. Eine Festschrift herausgegeben von Karl Samwer, Verlag der Engelhard-Reyherschen Hofbuchdruckerei, Gotha 1927.

[10] Wingborg B., Sur la mortalité des invalides suivant les experiences de l'assurance pension suédoise. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1930, pag. 112.

[11] Wells E. H., A rapid method of graduation select mortality rates. The Record of the American Institute of Actuaries, Oct. 1937, pp. 551—556.

[12] Whittaker, E. T. & Robinson, G., A Method of Graduation based on Probability.
The Calculus of Observations, London, Glasgow, Bombay, 1924.

[13] Gutachten der Herren Schärtlin, de Cérenville und Dumas für das eidg. Post- und Eisenbahndepartement über die E. V. K. und die P. H. K., 1936.

[14] Vajda St., Ueber Selekttafeln und Aggregattafeln. Atti del decimo congresso internazionale degli attuari, vol. II, communicazioni V, pag. 97.

[15] Bulina J., Sur l'élimination sélectives des invalides. Atti del decimo congresso internationale degli attuari, vol. II, communicazioni V, pag. 131.

[16] Borch F., Ueber eine Methode zur Vereinfachung der versicherungstechnischen Berechnungen bei doppelt abgestuften Sterbetafeln. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1936, pag. 212.

[17] . . . . . Ueber die technische Grundlage der Invalidenversicherung. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1939, pag. 114.

[18] Friedli W., Die Altersverteilung der Rentenbezüger bei der E. V. K. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker (M. S. V. M.), Bern 1925, Heft 20, pag. 35.

[19] Grüngard J., Beiträge zur mathematisch-technischen Grundlage der Invalidenversicherung (Diss. Bern 1935).

[20] Urech A., Sur les bases techniques de l'assurance collective. M. S. V. M., Bern 1930, Heft 25.

Lebenslauf.

Geboren am 29. November 1915 in Basel, durchlief ich daselbst die Primarschule und das Mathematisch-Naturwissenschaftliche Gymnasium. Nach bestandener Maturität immatrikulierte ich mich im Sommer-Semester 1934 an der Universität Basel und studierte Versicherungslehre, Mathematik und Nationalökonomie. Im Frühjahr 1937 setzte ich meine Studien in denselben Fächern an der hiesigen Universität fort.

Bern, den 30. Januar 1940.

Max Hofer.